XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 9

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

270921

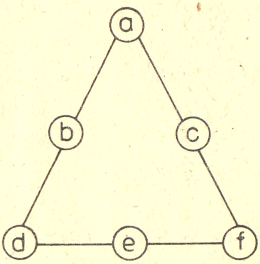

Abb. A 270921

In die Felder auf den Ecken und Seitenmittelpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (Abb. A 270921) sollen für a, b, c, d, e, f die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen werden, daß jede Zahl genau einmal vorkommt und daß auf jeder Dreieckseite die gleiche Summe entsteht.

Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sie weder durch Drehung noch durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

270922

Bei einem "ungarischen Dominospiel" mit den Zahlen 0, 1, ..., 9 ist (abgesehen von dieser größeren Zahl in der vom "gewöhnlichen Dominospiel" bekannten Weise) jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Spiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 9 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).

Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel). Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so daß man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).

(a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem "ungarischen Dominospiel" gehörenden Steine!

(b) Ermitteln Sie die größte Anzahl solcher Steine eines Spiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden läßt!

<u>270923</u>

Für jeden Quader seien die Kantenlängen mit a, b, c bezeichnet, die Länge der Raumdiagonalen mit d und der Oberflächeninhalt mit A.

Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:

Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3}(a+b+c)$, wenn $A = 8d^2$ gilt.

<u>270924</u>

Für je zwei natürliche Zahlen a, b, die die Ungleichungen

$$3a - 2b \leq 10, \tag{1}$$

$$3a + 8b \leq 25 \tag{2}$$

erfüllen, sei

$$S = a + 2b.$$

Untersuchen Sie, ob es unter allen Zahlen S, die sich auf diese Weise bilden lassen, eine größte gibt!

Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie diesen größtmöglichen Wert von S!

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

270921) Lösung: 10 Punkte

Wenn eine Eintragung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann gilt, wenn man die genannte Summe mit s bezeichnet,

$$a + b + d = s, \qquad (1)$$
$$a + c + f = s, \qquad (2)$$
$$d + e + f = s \qquad (3)$$

sowie $a + b + c + d + e + f = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Hiernach folgt durch Addition von (1), (2), (3)

$$21 + a + d + f = 3s,$$
$$7 + \frac{a + d + f}{3} = s. \qquad (4)$$

Da s (nach (1)) ganzzahlig ist, muß $a + d + f$ durch 3 teilbar sein. Das ist unter den Bedingungen der Aufgabe nur möglich, wenn für a, d, f eine der in der folgenden Tabelle genannten Angaben vorliegt. Dabei genügt es, nur die dort genannte Reihenfolge zu nehmen, da jede Umordnung der Eckfelder durch Drehung oder Spiegelung erreicht werden kann.

Anschließend enthält die Tabelle jeweils den Wert $a + d + f$, den Wert s aus (4), die Werte

$$b = s - a - d, \qquad (5)$$
$$c = s - a - f, \qquad (6)$$
$$e = s - d - f \qquad (7)$$

sowie die Angabe, ob die Bedingungen über das Vorkommen der Zahlen von 1 bis 6 erfüllt ist.

L 9

a	d	f	a+d+f	s	b	c	e	kommen 1 bis 6 vor?
1	2	3	6	9	6	5	4	Ja
1	2	6	9	10	7	3	2	Nein
1	3	5	9	10	6	4	2	Ja
1	5	6	12	11	5	4	0	Nein
2	3	4	9	10	5	4	3	Nein
2	4	6	12	11	5	3	1	Ja
3	4	5	12	11	4	3	2	Nein
4	5	6	15	12	3	2	1	Ja

Da (5), (6), (7) zu (1), (2), (3) äquivalent sind, ist damit gezeigt, daß die vier mit "Ja" gekennzeichneten Eintragungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Da sie sich in den überhaupt als a, d, f auftretenden Zahlen voneinander unterscheiden, sind sie auch sämtlich im Sinne der Aufgabenstellung voneinander verschieden. Somit sind genau diese vier (oder vier von ihnen nicht verschiedene) Eintragungen die gesuchten.

Hinweis zur Korrektur: Vom Schüler werden Aussagen zur Verschiedenheit nicht so ausführlich verlangt; Vollständigkeit und Verschiedenheit aller Eintragungen müssen jedoch gezeigt werden.

270922) Lösung: 10 Punkte

(a) Es gibt genau 10 Steine, bei denen auf den beiden Hälften dieselbe Zahl steht ("Doppelsteine"). Um die anderen Steine zu beschreiben, kann man für ihr erstes Feld eine der zehn Zahlen wählen und für das zweite Feld jeweils eine der neun anderen Zahlen. Dabei hat man jeden Stein der genannten Art genau zweimal erfaßt. Die Anzahl dieser Steine beträgt folglich $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.
Die Anzahl aller zu einem "ungarischen Dominospiel" gehörenden Steine beträgt somit $10 + 45 = 55$.

(b) In jeder geschlossenen Kette treten die Zahlen wegen der Domino-Spielregel nur in geradzahligen Häufigkeiten auf. Im gesamten Spiel kommt aber jede Zahl genau elfmal vor, nämlich zweimal auf dem Doppelstein mit dieser Zahl und neunmal auf den Steinen, die diese Zahl zusammen mit den anderen neun

Zahlen enthalten. Also muß nach dem Bilden einer geschlossenen Kette stets eine Menge von Steinen übrigbleiben, in der jede der zehn Zahlen mindestens einmal vorkommt. Eine solche Menge muß mithin mindestens fünf Steine enthalten; daher kann keine geschlossene Kette aus mehr als 50 Steinen bestehen.

Wie das folgende Beispiel einer Kette zeigt, in der genau die fünf Steine 01, 23, 45, 67, 89 fehlen, gibt es geschlossene Ketten aus 50 Steinen: Man wähle die Reihenfolge so, wie in Abbildung L 270922 durch die Linienführung gekennzeichnet, und füge die Doppelsteine an beliebigen passenden Stellen hinzu:

```
--> 02        03 --> 04        05 --> 06        07 --> 08        09 -->
    ↓          ↑      ↓                 ↓                 ↓
    12 --> 13         14 --> 15         16 --> 17         18 --> 19
                              ↓                 ↓                 ↓
                      24 <-- 25         26 <-- 27         28 <-- 29
                      ↓                 ↓                 ↓
                      34 --> 35         36 --> 37         38 --> 39
                                                ↓                 ↓
                                        46 <-- 47         48 <-- 49
                                        ↓                 ↓
                                        56 --> 57         58 --> 59
                                                                  ↓
                                                          68 <-- 69
                                                          ↓
                                                          78 --> 79
```

Abb. L 270922

Die gesuchte größte Zahl für eine geschlossene Kette beträgt folglich 50.

<u>Hinweise zur Korrektur:</u>

1. In Aufgabe (a) sind auch Zurückführungen auf Aufgaben möglich, deren Lösung als bekannter Sachverhalt zu zitieren ist (Anzahl von Kombinationen, Summenformel, Binomialkoeffizient).
2. Zum Korrigieren von (b) empfiehlt es sich, eine Liste aller Dominosteine (zum "Abhaken") anzulegen.

270923) Lösung: **10 Punkte**

Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3}(a+b+c)$, wenn

$$3d = a + b + c$$

gilt. Wegen $d > 0$ und $a + b + c > 0$ ist dies äquivalent mit

$$9d^2 = (a+b+c)^2,$$

d. h. $$9d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc),$$

und dies wegen $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ und $A = 2\,(ab+ac+bc)$ mit

$$9d^2 = d^2 + A,$$

also auch mit $8d^2 = A$, w.z.b.w.

270924) Lösung: **10 Punkte**

I. Für je zwei natürliche Zahlen a, b, die die Ungleichungen (1), (2) erfüllen, gilt: Wegen $a \geqq 0$ und (2) ist

$$8b \leqq 25,$$

wegen der Ganzzahligkeit von b daher

$$b \leqq 3;$$

also kann nur einer der folgenden Fälle vorliegen:

Im Fall $b = 0$ folgt aus (1)

$$3a \leqq 10,$$

wegen der Ganzzahligkeit von a also $a \leqq 3$ und daher $S \leqq 3$.

Im Fall $b = 1$ folgt aus (1)

$$3a \leqq 12,$$

also $a \leqq 4$ und daher $S \leqq 6$.

Im Fall $b = 2$ folgt aus (2)

$$3a \leqq 9,$$

also $a \leqq 3$ und daher $S \leqq 7$.

Im Fall $b = 3$ folgt aus (2)

$$3a \leqq 1,$$

für a als natürliche Zahl also $a = 0$ und daher $S = 6$.

Damit ist bewiesen: Für alle natürlichen Zahlen a, b, die (1) und (2) erfüllen, gilt $S \leqq 7$.

II. Für $a = 3$, $b = 2$ gilt einerseits

$$3a - 2b = 5,$$
$$3a + 8b = 25,$$

also erfüllen diese Zahlen a, b die Ungleichungen (1) und (2).

Andererseits gilt für diese Zahlen $S = 7$.

Mit I. und II. ist bewiesen: Es gibt unter allen Zahlen S, die sich auf die genannte Weise bilden lassen, eine größte; sie beträgt 7.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 9 Gesamtpunktzahl: 40

270921

Pro richtige Eintragung: 1 Punkt	4 Punkte
Ableitung einer notwendigen Bedingung (4)	4 Punkte
Vollständigkeit	1 Punkt
Verschiedenheit	1 Punkt
	10 Punkte

270922

a)	4 Punkte
b) Maximum an Steinen	3 Punkte
Existenznachweis	3 Punkte
	10 Punkte

270923

Herleitung	8 Punkte
Begründung der Äquivalenz	2 Punkte
	10 Punkte

270924

Angabe a = 3, b = 2, S = 7	3 Punkte
Begründung für das Maximum	7 Punkte
	10 Punkte