A 8;I XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

270831

Während einer Kindergeburtstagsfeier spielt man "Geburtstagsdatum erraten". Katrin, das Geburtstagskind, erklärt ihrem jeweiligen Spielpartner: "Teile dein Geburtstagsdatum auf in eine Tageszahl und eine Monatszahl! (Mein heutiger Geburtstag, der 24. Mai, wäre z. B. aufzuteilen in die Tageszahl 24 und die Monatszahl 5.) Verdopple nun die Tageszahl deines Geburtsdatums, addiere zum Ergebnis 7, multipliziere die Summe mit 50 und vermehre das Produkt um die Monatszahl deines Geburtsdatums!"
Nachdem das Ergebnis genannt wurde, war Katrin in der Lage, das betreffende Geburtsdatum zu nennen. Erkläre, durch welche Überlegung man das Geburtsdatum in jedem Fall aus dem Ergebnis der von Katrin geforderten Rechnung finden kann!

270832

Bei einem Schachturnier spielte jeder der acht Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie; die von den einzelnen Spielern erreichten Punktzahlen waren sämtlich voneinander verschieden. Bernd, der den zweiten Platz belegte, gewann so viele Punkte wie die vier Letztplazierten zusammen. Gerd wurde Dritter und Uwe belegte den siebenten Platz.
Untersuche, ob aus diesen Voraussetzungen eindeutig folgt, mit welchem Ergebnis die Partie zwischen Gerd und Uwe endete!
Ist dies der Fall, dann gib das Ergebnis an!

Hinweis: Im Schachsport erhält der Spieler für einen Sieg 1 Punkt, spielt er unentschieden, bekommt er $1/2$ Punkt. Für eine Niederlage gibt es 0 Punkte.

A 8;I

270833

Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Diesem Kreis sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC einbeschrieben, bei dem für die Größen α, β der Winkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ vorausgesetzt werde, daß $\alpha > \beta$ gilt. Im Dreieck ABC sei D der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe. Der von C ausgehende Strahl durch M schneide k in E.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen der Winkel $\sphericalangle DCE$ stets die Größe $\alpha - \beta$ hat!

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

270834

Es sei $\widehat{ABM}$ ein Kreissektor, für den die Länge $r = \overline{MA} = \overline{MB}$ gegeben ist und der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$ die Größe 60° hat. Von einer Geraden g, die zu AB parallel ist und die Strecken MA bzw. MB in C bzw. D schneidet, sei bekannt, daß der Umfang u_1 des Dreiecks MCD gleich dem Umfang u_2 der Figur $\widehat{ABDC}$ ist (siehe Abb. A 270834).

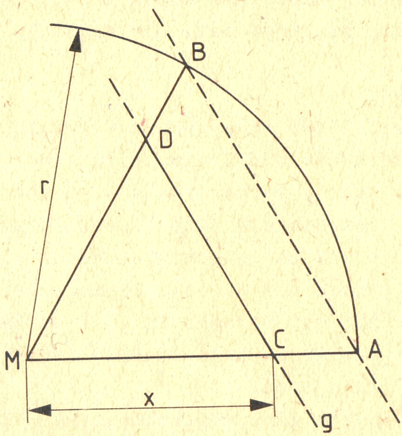

Abb. A 270834

a) Ermittle unter dieser Voraussetzung die Länge $x = \overline{MC}$ in Abhängigkeit von r!

b) Die Länge r sei mit einer Genauigkeit gemessen, bei der sich auf eine Dezimale nach dem Komma genau $r = 6{,}7$ cm ergibt. Ferner sei zur Berechnung verwendet, daß auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau $\pi = 3{,}14$ gilt.
Beweise, daß man daraus die Länge x (in Zentimetern) auf eine Dezimale nach dem Komma genau durch Berechnung von Schranken ermitteln kann! Wie lautet diese Längenangabe x?

270835

Eine quadratförmige schachbrettartige Tabelle bestehe aus 15 mal 15 Feldern. Eine der beiden Diagonalen des Quadrates sei d genannt.

In jedes der 225 Felder der Tabelle kann eine der Zahlen 1 bis 15 so eingetragen werden, daß die folgenden Forderungen (1) und (2) erfüllt sind:

(1) Jede (waagerechte) Zeile enthält jede der 15 Zahlen genau einmal.

(2) Für je zwei Felder, die symmetrisch zu d liegen, gilt: Die Zahlen in diesen zwei Feldern sind einander gleich.

A 8;II

Für jede Eintragung kann man die Summe aus denjenigen Zahlen bilden, die in den fünfzehn von der Diagonale d durchquerten Feldern stehen.

Beweise, daß diese Summe durch die Voraussetzungen (1), (2) eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Summe!

270836

Es sei ABCDS eine gerade Pyramide mit einem Quadrat ABCD als Grundfläche und S als Spitze. Der Fußpunkt der Höhe dieser Pyramide sei E, ferner sei $a = \overline{AB}$ und $h = \overline{ES}$.

I. Zeichne ein Bild dieser Pyramide mit den Maßen a = 6 cm, h = 8 cm in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 45^\circ$, $q = \frac{1}{2}$), wobei die Strecke ES in wahrer Länge erscheinen soll!

II. Auf der Strecke ES gibt es genau einen Punkt P, für den die (im Raum verlaufenden) Strecken AP und SP einander gleichlang sind.

Leite eine Möglichkeit her, in dem nach I. hergestellten Bild der Pyramide ABCDS den Bildpunkt dieses Punktes P zu konstruieren; beschreibe diese Konstruktion und führe sie durch!

III. Die Länge a sei beliebig gegeben. Ermittle dann in Abhängigkeit von a alle diejenigen Werte h, für die sich (in der Pyramide mit diesen Maßen a, h) ein Punkt P auf ES finden läßt, der die in II. genannte Bedingung $\overline{AP} = \overline{SP}$ erfüllt!

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

270831) Lösung: 6 Punkte

Für jedes Geburtsdatum mit Tageszahl x und Monatszahl y gilt:

Die geforderte Rechnung führt der Reihe nach auf die Zahlen

$2x$,

$2x + 7$,

$(2x + 7) \cdot 50 = 100x + 350$,

also auf das Ergebnis $100x + 350 + y$.

Aus diesem Ergebnis kann man die gesuchten Zahlen x und y (z. B.) folgendermaßen finden: Man subtrahiert 350 und erhält die Zahl $100x + y$. Da y als Monatszahl kleiner als 100 ist, muß y die aus der Zehner- und Einerziffer von $100x + y$ gebildete Zahl sein (wobei, falls die Zehnerziffer 0 lautet, diese wegzulassen ist); und läßt man umgekehrt aus $100x + y$ die Zehner- und Einerziffer weg, so bleibt die (Zifferndarstellung der) Zahl x übrig.

270832) Lösung: 7 Punkte

Aus den Voraussetzungen folgt, daß Bernd höchstens 6 Punkte erreicht hat; denn entweder hat der Sieger des Turniers alle seine sieben Partien gewonnen, also auch die gegen den Zweitplazierten Bernd, oder der Sieger hat höchstens $6\frac{1}{2}$ Punkte erreicht und Bernd aus diesem Grunde (als Zweitplazierter mit davon verschiedener Punktzahl) höchstens 6 Punkte.

Daher haben nach Voraussetzung die vier Letztplazierten zusammen ebenfalls hächstens 6 Punkte erreicht. Sie haben aber unter sich bereits 6 Partien gespielt[1] und müssen daher bereits in diesen Partien zusammen 6 Punkte erhalten haben. Also haben sie alle ihre Spiele gegen die ersten vier verloren. Insbesondere hat der Siebente gegen den Dritten verloren; d. h., es folgt eindeutig, daß Gerd seine Partei gegen Uwe gewann.

Hinweis zur Korrektur: Eine Probe, d. h. ein Nachweis, daß eine Punktverteilung existiert, bei der alle Voraussetzungen erfüllt sind, wird nicht vom Schüler verlangt, da die Existenz einer solchen Punktverteilung dem Aufgabentext entnommen werden kann.

Andererseits ist aber zu beachten, daß die Aufgabe nicht dadurch gelöst werden kann, daß eine Punktverteilung angegeben wird, die alle Voraussetzungen erfüllt, und festgestellt wird, daß bei *dieser* Punktverteilung Gerd gegen Uwe gewann. Denn die - laut Aufgabenstellung zu untersuchende - eindeutige Bestimmtheit des Ergebnisses der Partie Gerd/Uwe liegt nur dann vor, wenn in *jeder* Punktverteilung, die den Voraussetzungen genügt, für die Partie Gerd/Uwe *dasselbe* Ergebnis auftreten muß. (Logisch korrekt - wenngleich praktisch unrealistisch - wäre freilich, alle Verteilungen anzugeben, die den Voraussetzungen genügen, nachzuweisen (!), daß es alle sind, und darin überall die Partei Gerd/Uwe aufzusuchen.)

---

1 Dies kann als bekannter Sachverhalt angeführt werden.

270833) Lösung: **6 Punkte**

Nach Voraussetzung ist CE ein Durchmesser des Kreises k, und A liegt auf k. Nach dem Satz des Thales folgt hieraus

$$\overline{\sphericalangle EAC} = 90^\circ.$$

Nach Voraussetzung sind $\sphericalangle AEC$ und $\sphericalangle ABC$ Peripheriewinkel über gleichem Bogen, also gilt

$$\overline{\sphericalangle AEC} = \overline{\sphericalangle ABC} = \beta .$$

Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck AEC folgt hieraus

$$\overline{\sphericalangle ACE} = 90^\circ - \beta . \qquad (1)$$

Nach Voraussetzung gilt ferner $\overline{\sphericalangle DAC} = \overline{\sphericalangle BAC} = \alpha$ und $\overline{\sphericalangle ADC} = 90^\circ$.

Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ADC folgt hieraus

$$\overline{\sphericalangle ACD} = 90^\circ - \alpha . \qquad (2)$$

Nach Voraussetzung gilt schließlich $\alpha > \beta$; wegen (1) und (2) folgt hieraus $\overline{\sphericalangle ACE} > \overline{\sphericalangle ACD}$ und damit, wie behauptet,

$$\begin{aligned} \overline{\sphericalangle DCE} &= \overline{\sphericalangle ACE} - \overline{\sphericalangle ACD} \\ &= (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \alpha) \\ &= \alpha - \beta . \end{aligned}$$

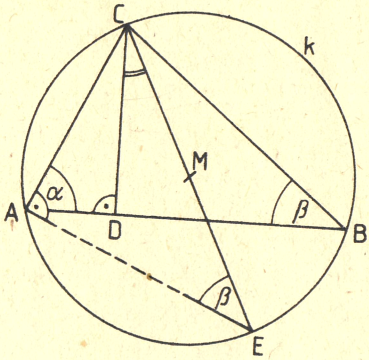

Abb. L 270833

L 8;II

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

<u>270834) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

a) Wegen $\overline{\sphericalangle AMB} = 60^\circ = \frac{360^\circ}{6}$ hat $\overset{\frown}{AB}$ die Bogenlänge

1 $$b = \frac{2\pi r}{6} = \frac{1}{3}\pi r. \qquad (1)$$

Da Dreieck MAB mit $\overline{MA} = \overline{MB}$ gleichschenklig ist, gilt für die Basiswinkel $\overline{\sphericalangle MAB} = \overline{\sphericalangle MBA}$ sowie nach dem Innenwinkelsatz $\overline{\sphericalangle MAB} + \overline{\sphericalangle MBA} = 180^\circ - 60^\circ$; daraus folgt $\overline{\sphericalangle MAB} = \overline{\sphericalangle MBA} = 60^\circ$.
1 Wegen $CD \parallel AB$ gilt daher auch $\overline{\sphericalangle MCD} = \overline{\sphericalangle MAB} = 60^\circ$ (Stufenwinkel) und ebenso $\overline{\sphericalangle MDC} = 60^\circ$. Also ist Dreieck MCD gleichseitig, d. h., es ist

$$\overline{MC} = \overline{MD} = \overline{CD} = x. \qquad (2)$$

Aus (2) folgt

$$u_1 = 3x$$

und $\overline{CA} = \overline{DB} = r-x$; hieraus und aus (1) folgt

1 $$u_2 = x + 2(r-x) + \frac{1}{3}\pi r.$$

Daher besagt die Voraussetzung $u_1 = u_2$

$$3x = x + 2r - 2x + \frac{1}{3}\pi r,$$

$$4x = \left(2 + \frac{1}{3}\pi\right)r$$

1 $$= \frac{(6+\pi)r}{3},$$

$$x = \frac{6+\pi}{12} \cdot r. \qquad (3)$$

b) Aus den Genauigkeitsvoraussetzungen ergibt sich nach (3), daß die Maßzahl von x als eine untere Schranke die Zahl

$$\frac{6 + 3{,}135}{12} \cdot 6{,}65 = 5{,}0623125$$

2 und als eine obere Schranke die Zahl

$$\frac{6 + 3{,}145}{12} \cdot 6{,}75 = 5{,}1440625$$

hat. Damit ist bewiesen, daß auf eine Dezimale nach dem Komma genau

1 $$x = 5{,}1 \text{ cm}$$

gilt.

Hinweise zur Korrektur:

1. Für die Formel (3) sind auch andere Schreibweisen zu akzeptieren, z. B. $x = (\frac{1}{2} + \frac{\pi}{12})r$.
2. In b) kann auch - durch Abschätzen von Zwischenergebnissen - numerisch einfacher gerechnet werden. Dabei brauchen (für die Zwischenergebnisse) die Rundungsregeln nicht eingehalten zu werden; es ist jedoch auf die Abschätzungsrichtungen zu achten: Untere Schranken dürfen nur durch kleinere, obere nur durch größere ersetzt werden, und am Ende muß (auch nach solchen Vereinfachungen) $5{,}05\ \text{cm} < x < 5{,}15\ \text{cm}$ beweisbar bleiben. Beispiel: Ermittlung einer unteren Schranke durch $(6 + 3{,}135)/12 > 0{,}76$, $0{,}76 \cdot 6{,}65 = 5{,}054$; einer oberen Schranke durch $(6 + 3{,}145)/12 < 0{,}7621$, $0{,}7621 \cdot 6{,}75 < 5{,}145$.
3. Falls statt der Schranken 3,135 bzw. 3,145, wie sie der Aufgabenstellung entsprechen, mit dem internen Näherungswert des Taschenrechners für π gerechnet wird, folgt (mit 8 geltenden Dezimalen) $(6 + \pi)/12 \cdot 6{,}65 \approx 5{,}0659659$; $(6 + \pi)/12 \cdot 6{,}75 \approx 5{,}1421459$, woraus man wieder auf eine Dezimale genau $x = 5{,}1$ cm ablesen könnte. Ein solches Vorgehen mit fehlender Schrankenberücksichtigung von π ist jedoch nicht im Sinne der Aufgabenstellung als vollständig korrekte Lösung einzuschätzen.

270835) Lösung: 6 Punkte

Für jede Eintragung, die die Voraussetzungen (1), (2) erfüllt, gilt:

Wegen (1) kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 in der Eintragung genau 15mal vor.

Wegen (2) kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 außerhalb der von d durchquerten Felder in einer geraden Anzahl vor, da diese Felder stets - mit der Symmetrie bezüglich d - zu zweien gekoppelt auftreten.

Also kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 in den von d durchquerten Feldern in einer ungeraden Anzahl und somit mindestens einmal vor.

Da für diese 15 Zahlen aber nur 15 von d durchquerte Felder zur Verfügung stehen, kann jede dieser Zahlen auch nicht mehr als einmal vorkommen.

Damit ist bewiesen: In den von d durchquerten Feldern kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 genau einmal vor; ihre Summe ist somit eindeutig bestimmt, sie beträgt $1 + 2 + \ldots + 15 = 120$.

Die Hinweise zur Korrektur bei Aufgabe 270832 gelten sinngemäß auch für diese Aufgabe.

270836) Lösung: 8 Punkte

a) und Konstruktion zu b): Abb. L 270836a;

andere Lösungsmöglichkeit: Abb. L 270836b.

b) Man kann das Dreieck AES in wahrer Größe als Dreieck $A_0E_0S_0$ konstruieren, indem man $\overline{E_0S_0} = h$, $\sphericalangle A_0E_0S_0 = 90^\circ$ und $\overline{A_0E_0}$ als halbe Diagonalenlänge eines Quadrates der Seitenlänge a verwendet.

Dem Punkt P entsprechend ist dann derjenige Punkt P_0 auf E_0S_0 zu ermitteln, für den $\overline{A_0P_0} = \overline{S_0P_0}$ gilt. Da (in der Zeichenebene) alle Punkte X mit $\overline{A_0X} = \overline{S_0X}$ auf der Mittelsenkrechten von A_0S_0 liegen, kann man P_0 konstruieren, indem man E_0S_0 mit dieser Mittelsenkrechten zum Schnitt bringt.

In der Pyramide ABCDS liegt dann der gesuchte Punkt P so auf ES, daß $\overline{EP} = \overline{E_0P_0}$ gilt. Da nun auf dem in a) hergestellten Bild die Strecke ES mit ihren Teilstrecken in wahrer Länge erscheint, kann man den Bildpunkt von P konstruieren, indem man auf der Bildstrecke ES von E aus die Länge $\overline{E_0P_0}$ abträgt.

c) In der Pyramide mit den Maßen a, h läßt sich genau dann ein Punkt P auf ES finden, der $\overline{AP} = \overline{SP}$ erfüllt, wenn eine nach der Beschreibung in b) durchgeführte Konstruktion zu einem Schnittpunkt P_0 von E_0S_0 mit der Mittelsenkrechten von A_0S_0 führt.

Das ist genau dann[1] der Fall, wenn $\overline{E_0S_0} \geqq \overline{A_0E_0}$ gilt, d. h. genau für alle $h \geqq \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Bemerkungen zur Korrektur:

1. Da in b) die Existenz genau eines gesuchten Punktes P als zu verwendender Sachverhalt vorgegeben wird, genügt es zur geforderten Herleitung der Konstruktion, wenn (außer der Nutzung von Kongruenz AES $\cong$ $A_0E_0S_0$ und Abbildung der Strecke ES in wahrer Größe) eine der beiden logischen Schlußrichtungen genutzt wird, wonach dann und nur dann X auf der Mittelsenkrechten liegt, wenn X gleiche Entfernungen zu A_0, S_0 hat.
2. Im obigen Lösungstext wurde zwar in Worten, aber - gemäß dem Vorgehen des Schulbuches - nicht in der Bezeichnung zwischen Original- und Bildpunkten bei Projektion unterschieden. Analog kann auch akzeptiert werden, wenn ein Schüler auf Bezeichnungsunterschiede wie A, E, S, P - A_0, E_0, S_0, P_0 verzichtet.

L 8;II

3. Das Fehlen des Gleichheitszeichens in $h \geqq \frac{a}{2}\sqrt{2}$ ist zwar zu korrigieren (da auch P = E auf ES liegt), aber nicht mit Punktabzug zu bewerten.

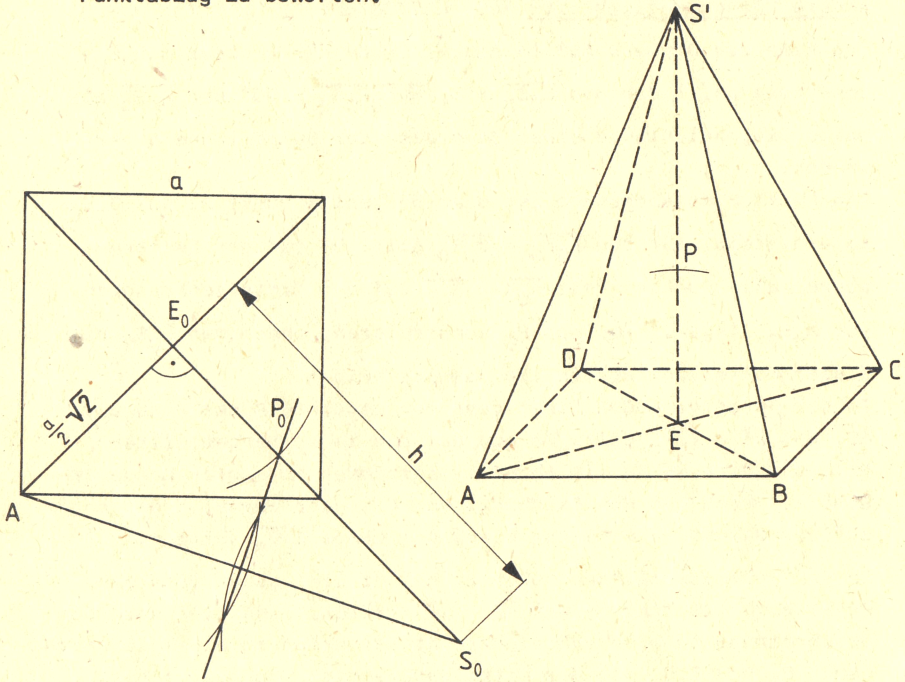

Abb. L 270836a

---

1 Diese Aussage (zur Frage, welche der anliegenden Seiten von der Mittelsenkrechten einer Dreiecksseite geschnitten wird) kann als bekannter Sachverhalt verwendet werden.

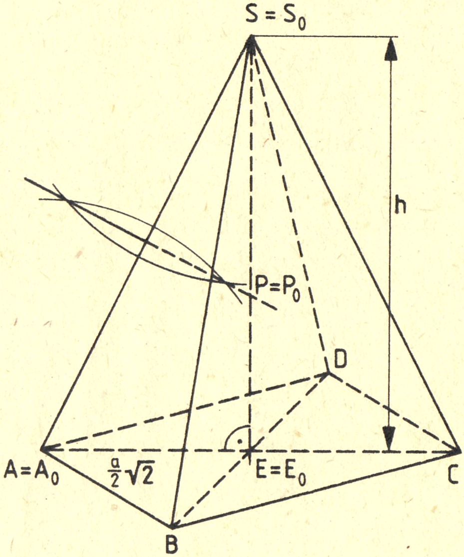

Abb. L 270836b