XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

270821

Ein AG-Leiter behauptet, er könne jede von seinen Zirkelteilnehmern gedachte Zahl erraten, wenn ihm nur das Ergebnis der folgenden Rechnung genannt wird: "Denke dir eine Zahl. Addiere dazu die Zahl 5, multipliziere die Summe mit 16, subtrahiere davon das Sechsfache der gedachten Zahl und dividiere diese Differenz durch 10!"

Läßt sich tatsächlich aus dem nun zu nennenden Ergebnis dieser Rechnung die gedachte Zahl ermitteln?

Wenn das der Fall ist, so beschreibe und begründe, auf welche Weise das geschehen kann!

270822

Gegeben sei ein Kreis k; sein Mittelpunkt sei M, sein Radius betrage r. Von drei Punkten A, B, C auf k werde vorausgesetzt, daß $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt und daß der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 120° hat.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{AB} = r$ gilt!

270823

Über ein Turnier in einer AG "Schach" wird berichtet: Das Turnier wurde in mehreren Runden ausgetragen. In jeder Runde spielte jedes AG-Mitglied gegen jedes andere genau eine Partie. Auf diese Weise wurden in dem Turnier insgesamt 112 Partien gespielt. Es nahmen mehr als zwei Mitglieder teil.

A 8

Untersuche, ob ein Turnier möglich ist, bei dem diese Angaben zutreffen, und ob die Anzahl der Runden sowie die Anzahl der Teilnehmer eindeutig aus den Angaben folgen!
Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Anzahlen!

270824

Ein Würfel W werde in volumengleiche Teilwürfel zerlegt. Der Oberflächeninhalt des Würfels W sei A, die Summe der Oberflächeninhalte der voneinander getrennten Teilwürfel sei S.
Ermittle das Verhältnis A:S

(a) wenn der Würfel W die Kantenlänge 14 cm hat und die Anzahl der Teilwürfel 8 beträgt,

(b) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl 8 der Teilwürfel,

(c) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl n^3 der Teilwürfel, wobei n eine beliebige natürliche Zahl mit $n \geqq 2$ ist!

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

270821) Lösung: **8 Punkte**

Bezeichnet man die gedachte Zahl mit x, dann werden durch die genannte Rechnung der Reihe nach die Zahlen

$$x + 5,$$
$$(x + 5) \cdot 16 = 16x + 80,$$
$$16x + 80 - 6x = 10x + 80,$$
$$(10x + 80) : 10 = x + 8$$

gebildet. Subtrahiert man hiervon die Zahl 8, so erhält man die Zahl x. Damit wird bewiesen: Die gedachte Zahl läßt sich aus dem zu nennenden Ergebnis ermitteln, indem man von diesem Ergebnis 8 subtrahiert.

270822) Lösung: **10 Punkte**

Wegen $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = r$
und $\overline{AB} = \overline{BC}$
sind die Dreiecke ABM und CBM gleichschenklig und zueinander kongruent (Kongruenzsatz sss). Also ist
$\overline{\sphericalangle ABM} = \overline{\sphericalangle CBM}$.
Hieraus, und da nach Voraussetzung
$\overline{\sphericalangle ABM} + \overline{\sphericalangle CBM} = \overline{\sphericalangle ABC} = 120^\circ$
ist, folgt
$\overline{\sphericalangle ABM} = \overline{\sphericalangle CBM} = 60^\circ$.
Daher sind die Dreiecke ABM und CBM sogar gleichseitig; insbesondere gilt
$\overline{AB} = \overline{MA} = r$, w.z.b.w.

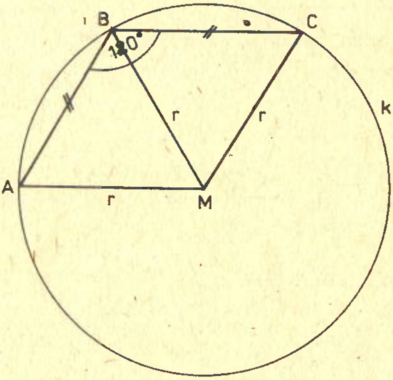

Abb. L 270822

270823) Lösung: 10 Punkte

Wenn ein solches Turnier möglich ist, müssen in jeder Runde gleich viele Partien gespielt werden; daher muß die Anzahl der Partien einer Runde ein Teiler von 112 sein, d. h. eine der Zahlen

1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112.

Die folgende Tabelle zeigt eine Ermittlung von Werten für die Anzahl der Partien einer Runde. Jeweils zu einer Teilnehmerzahl wird diese Partienzahl folgendermaßen gefunden: Sind es drei Teilnehmer A, B, C, so ergeben sich drei Partien AB, AC, BC. Bei jeder Vergrößerung der Teilnehmerzahl um eins kommen so viele Partien hinzu, wie die vorhergehende Teilnehmerzahl angibt (da der neue Teilnehmer gegen alle vorigen zu spielen hat).

Teilnehmer	Partien
3	3
4	3 + 3 = 6
5	6 + 4 = 10
6	10 + 5 = 15
7	15 + 6 = 21
8	21 + 7 = 28
9	28 + 8 = 36

Teilnehmer	Partien
10	36 + 9 = 45
11	45 + 10 = 55
12	55 + 11 = 66
13	66 + 12 = 78
14	78 + 13 = 91
15	91 + 14 = 105
16	105 + 15 = 120

Bei weiterer Fortsetzung der Tabelle ergeben sich nur noch größere Partienzahlen. Als einzige Partienzahl, die ein Teiler von 112 ist, verbleibt daher 28. Damit und wegen 112 : 28 = 4 ist bewiesen:

Ein Turnier der genannten Art ist möglich; aus den Angaben folgt eindeutig: Es wurden genau vier Runden gespielt; es nahmen genau acht AG-Mitglieder teil.

Andere Lösungsmöglichkeit: Man beweist, daß jeweils eine Teilnehmerzahl m auf die Partienzahl

$$p = \frac{m(m-1)}{2}$$

einer Runde führt: Jeder der m Teilnehmer hat genau m-1 Partien zu spielen, und mit der so berechneten Anzahl m(m-1) hat man jede Partei genau zweimal erfaßt. Da für $m \geqq 16$ bereits $p \geqq 120$ wird, muß $2 < m < 16$ gelten.

L 8

Aus $p \mid 112$ und der Primfaktorenzerlegung $112 = 2^4 \cdot 7$ folgt ferner: Die Primfaktorenzerlegungen von m und von m-1 enthalten keine anderen Primfaktoren als 2 und 7. Die folgende Tabelle zeigt, daß dies nur für $m = 8$ zutrifft, woraus dann $p = 28$ und die Rundenzahl $112 : 28 = 4$ folgt.

m		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m-1		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Existiert ein Primfaktor $\neq 2$, $\neq 7$?	Ja, z. B.:	3	3	4	3	3		3	3	3	3	3	13	3
	Nein:						*							

<u>270824) Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

(c) Es gilt $A = 6a^2$. Ferner hat W das Volumen a^3; daraus folgt:

Jeder Teilwürfel hat das Volumen $\frac{a^3}{n^3}$, also die Kantenlänge $\frac{a}{n}$ und folglich den Oberflächeninhalt $6\frac{a^2}{n^2}$. Daher ist

$$S = n^3 \cdot 6 \cdot \frac{a^2}{n^2} = 6na^2.$$

Somit ergibt sich

$$A : S = 6a^2 : (6na^2)$$
$$= 1 : n.$$

Wählt man hierin $n = 2$, so erhält man (wegen $2^3 = 8$) als Ergebnis sowohl zu (a) als auch zu (b) das Verhältnis $A : S = 1 : 2$.
Natürlich ist es auch möglich, in der Reihenfolge (a), (b), (c) vorzugehen, indem man dieselbe Rechnung erst mit den speziellen Werten a, n und dann allgemein durchführt.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 8 Gesamtpunktzahl: 40

270821

Angabe einer korrekten und lückenlosen Beschreibung der Vorgehensweise, die das Gewünschte leistet	8 Punkte
Falls ein Schüler nur anhand von Beispielen seine Vorgehensweise beschreibt, können höchstens 3 Punkte erteilt werden.	
	8 Punkte

270822

Angabe aller für den Beweis benötigten Feststellungen (z. B. $\triangle ABM \cong \triangle CBM$, ...)	5 Punkte
Angabe aller zugehöriger Begründungen (z. B. sss, ...)	5 Punkte
	10 Punkte

270823

Korrekte und lückenlose Herleitung einschließlich des Nachweises der Einzigkeit	7 Punkte
Angabe der Anzahl der Runden und der Anzahl der AG-Mitglieder	3 Punkte
	10 Punkte

270824

a)	3 Punkte
b)	4 Punkte
c)	5 Punkte
	12 Punkte