A 7;I

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

<u>Achtung</u>: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>270731</u>

Vier Mannschaften, A, B, C und D, trugen ein Fußballturnier aus. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere Mannschaft. Jedes gewonnene Spiel wurde mit 2 Punkten für die Siegermannschaft und mit 0 Punkten für die Verlierermannschaft gewertet, jedes unentschiedene Spiel für beide Mannschaften mit je 1 Punkt, Weiterhin ist folgendes bekannt:

(1) Keine Mannschaft blieb ohne Punkte.

(2) Mannschaft A konnte ihren Turniersieg aus dem vorigen Jahr nicht wiederholen, erreichte aber eine höhere Gesamtpunktzahl als Mannschaft B.

(3) Mannschaft C gewann kein Spiel, erreichte jedoch eine geradzahlige Gesamtpunktzahl.

(4) Mannschaft D spielte in keinem ihrer Spiele unentschieden und gewann gegen B sowie gegen den Turniersieger des vorigen Jahres.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, welche Punktzahlen jedes Spiel des Turniers den einzelnen Mannschaften erbrachte und welche Gesamtpunktzahlen sie erreichten! Ist das der Fall, so trage die Punktzahlen in die folgende Tabelle ein!

Mannschaft	Erreichte Punktzahl gegen A	B	C	D	Erreichte Gesamtpunktzahl
A	-				
B		-			
C			-		
D				-	

270732

In einem Betrieb werden Erzeugnisse hergestellt, bei denen die Herstellungskosten für jedes Stück 19,20 M betragen. Der Betrieb hat die Möglichkeit, für 13 500 M eine neue Werkzeugmaschine anzuschaffen; mit dieser Maschine würden die Herstellungskosten für jedes Stück nur noch 13,15 M betragen. Ein Planziel lautet: Die Summe aus den Anschaffungskosten der neuen Maschine und aus den Herstellungskosten der damit in 3 Jahren hergestellten Erzeugnisse soll weniger als 80 % derjenigen Herstellungskosten betragen, die (für ebenso viele Erzeugnisse) ohne Nutzung der neuen Maschine entstehen würden.
Ermittle die kleinste Stückzahl pro Jahr, mit der dieses Planziel zu erreichen ist!

270733

Gegeben sei ein Dreieck ABC, in dem die Größe γ des Winkels $\sphericalangle$ ACB kleiner ist als die Größe β des Winkels $\sphericalangle$ ABC. Gefordert seien die folgenden von einem Punkt P zu erfüllenden Bedingungen (1) und (2):

(1) P liegt auf der Strecke AC.
(2) Der Winkel $\sphericalangle$ APB hat die Größe 2γ.

(a) Beschreibe hierzu eine Konstruktion; zeige, daß sie zu jedem Dreieck ABC mit $\gamma < \beta$ genau einen Punkt P liefert und daß die beiden folgenden Aussagen (b) und (c) gelten!
(b) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, dann wird er durch die beschriebene Konstruktion erhalten.
(c) Wenn ein Punkt P durch die beschriebene Konstruktion erhalten wird, dann erfüllt er die Bedingungen (1) und (2).

A 7;II

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

270734

Ermittle alle diejenigen geordneten Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen x, y, für die $x^2 + xy + y^2 = 49$ gilt!

270735

In einem Dreieck ABC seien CD und BE die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ACB$ bzw. $\sphericalangle ABC$. Der Schnittpunkt dieser Strecken C~~B~~D, BE sei S. Wie üblich bezeichne α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$. Vorausgesetzt werde nun, daß der Winkel $\sphericalangle BSD$ die Größe 4α hat.
Weise nach, daß durch diese Voraussetzung die Winkelgröße α eindeutig bestimmt ist, und ermittle α !

270736

In einem Dreieck ABC seien AD, BE und CF die drei Seitenhalbierenden. Sie gehen bekanntlich durch einen gemeinsamen Punkt S.

Beweise, daß für jedes Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Aussage gilt: Alle sechs Dreiecke BDS, DCS, CES, EAS, AFS, FBS haben denselben Flächeninhalt!

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

270731) Lösung: 6 Punkte

Aus den Angaben folgt:
Nach (4) gewann D gegen B und gegen den Vorjahressieger, d. h. nach (2) gegen A. Da ferner C nach (3) nicht gegen D gewann und nach (4) auch nicht gegen D unentschieden spielte, folgt:
(5) D gewann alle Spiele.
Da C hiernach aus dem Spiel gegen D keinen Punkt erhielt, folgt aus (3), daß die Summe der Punktzahlen, die C aus seinen Spielen gegen A und B erreichte, gerade ist. Ferner sind diese beiden Punktzahlen nach (3) kleiner als 2. Da C aber nach (1) nicht ohne Punkte blieb, verbleibt als einzige Möglichkeit:
(6) C spielte gegen A und B unentschieden.
Nach (5) und (6) erreichte A in den Spielen gegen C und D ebenso viele Punkte wie B gegen C und D. Also kann die nach (2) höhere Gesamtpunktzahl für A als für B nur dadurch entstanden sein, daß gilt:
(7) A gewann gegen B.
Damit ist bewiesen, daß aus den Angaben eindeutig die nachstehenden Punktzahlen folgen:

Mannschaft	Erreichte Punktzahl gegen A	B	C	D	Erreichte Gesamtpunktzahl
A	-	2	1	0	3
B	0	-	1	0	1
C	1	1	-	0	2
D	2	2	2	-	6

Hinweis zur Korrektur: Eine Probe (Bestätigung, daß diese Punktzahlen (1) bis (4) erfüllen) ist nicht zu einer vollständigen Lösung erforderlich, da die Existenz einer solchen Punktverteilung dem Aufgabentext entnommen werden kann.

270732) Lösung: 7 Punkte

Werden pro Jahr x Stück hergestellt, so würden die Herstellungskosten für die in 3 Jahren ohne Nutzung der neuen Maschine hergestellten Erzeugnisse

$$3x \cdot 19{,}20 \text{ M}$$

betragen. 80 % hiervon sind

$$3x \cdot 19{,}20 \text{ M} \cdot \frac{80}{100} = 3x \cdot 15{,}36 \text{ M}.$$

Die Herstellungskosten für die in 3 Jahren mit der neuen Maschine hergestellten Erzeugnisse betragen

$$3x \cdot 13{,}15 \text{ M}.$$

Also wird das Planziel genau dann erreicht, wenn

$$13500 + 3x \cdot 13{,}15 < 3x \cdot 15{,}36,$$

d. h. $13500 < 3x \cdot 2{,}21,$

$$x \cdot 2{,}21 > 4500$$

gilt.

Wegen $2036 \cdot 2{,}21 = 4499{,}56$ und $2037 \cdot 2{,}21 = 4501{,}77$ ist somit die kleinste Stückzahl pro Jahr, mit der das Planziel erreicht wird,

$$x = 2037.$$

Bemerkung: Dieser ganzzahlige Wert kann auch durch die mit der Genauigkeit eines Taschenrechners erhaltene Angabe

$$4500 : 2{,}21 = 2036{,}1991$$

begründet werden.

270733) Lösung: 7 Punkte

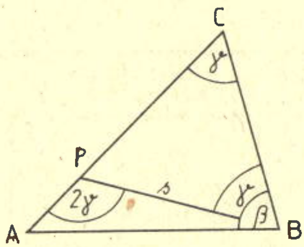

Abb. L 270733a

(a) Man trägt in B an BC denjenigen Winkel der Größe γ an, dessen zweiter Schenkel s auf derselben Seite der Geraden durch B und C liegt wie A (Abb. L 270733a).

Für jedes Dreieck ABC mit $\gamma < \beta$ gilt: Da der Strahl s von B aus in das Innere des Dreiecks geht, schneidet er die Strecke AC in genau einem Punkt P.

(b) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt: Nach (1) liegt P auf AC, also auf derselben Seite der Geraden durch B und C wie A, es gilt $\overline{\sphericalangle PCB} = \overline{\sphericalangle ACB} = \gamma$, und BCP ist ein Dreieck, für das nach dem Außenwinkelsatz und nach (2)

$$\overline{\sphericalangle CBP} = \overline{\sphericalangle APB} - \overline{\sphericalangle PCB} = 2\gamma - \gamma = \gamma$$

gilt. Also liegt P auf AC und auf dem zweiten Schenkel s des nach der Konstruktionsbeschreibung an BC angetragenen Winkels der Größe γ.

(c) Wenn ein Punkt P durch die beschriebene Konstruktion erhalten wird, so folgt: P liegt auf AC, erfüllt also (1), und es gilt $\overline{\sphericalangle PCB} = \overline{\sphericalangle ACB} = \gamma$. Ferner folgt nach dem Außenwinkelsatz und nach Konstruktion

$$\overline{\sphericalangle APB} = \overline{\sphericalangle PCB} + \overline{\sphericalangle CBP} = \gamma + \gamma = 2\gamma,$$

also ist auch (2) erfüllt.

Anderer Lösungsweg:

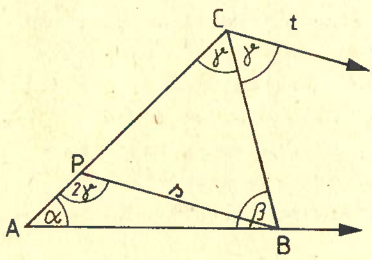

Abb. L 270733b

(a) Man trägt in C an CB denjenigen Winkel der Größe γ an, dessen zweiter Schenkel t auf der anderen Seite der Geraden durch B und C liegt als A (Abb. L 270733b).
Dann konstruiert man die Parallele s durch B zu t. Für jedes Dreieck ABC mit $\gamma < \beta$ gilt: Da (für $\alpha = \overline{\sphericalangle BAC}$; wegen $\alpha + \gamma + \gamma < \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$) sich t und die Verlängerung von AB über B hinaus schneiden, schneidet s die Strecke AC in genau einem Punkt P.

(b) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt: Der Strahl t aus C, der zu dem Strahl s aus P durch B gleichsinnig parallel ist, bildet mit CA einen Winkel, der ein Stufenwinkel von $\sphericalangle APB$ ist und folglich die Größe 2γ hat. Also bildet t mit CB einen Winkel der Größe $2\gamma - \gamma = \gamma$; also werden t, s und P durch die beschriebene Konstruktion erhalten.

(c) Wenn ein Punkt P durch die beschriebene Konstruktion erhalten wird, so folgt: P liegt auf AC, und $\sphericalangle$ APB hat als Stufenwinkel dieselbe Größe $\gamma + \gamma = 2\gamma$ wie der Winkel, den der konstruierte Strahl t mit CA bildet.

<u>Bemerkung:</u>

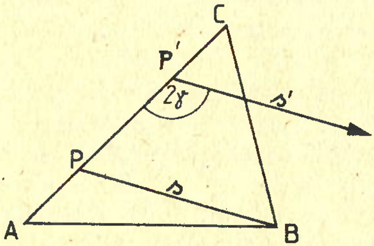

Abb. L 270733c

Ein – eigentlich besonders "natürlicher" konstruktiver – Weg zur Erfüllung von (1), (2) ist das Antragen des Winkels der geforderten Größe 2γ an irgend einen Punkt P' von AC mit anschließender Verschiebung, so daß das Bild s (des zweiten Schenkels s' des angetragenen Winkels) durch B geht (Abb. L 270733c). Zuvor bildet man die Winkelgröße 2γ durch Antragen eines Winkels der Größe γ an einen seiner Schenkel.

Der obige 2. Lösungsweg ist die Variante P' = C dieses Verfahrens; das Bilden und Antragen von 2γ geschieht dabei im gleichen Arbeitsgang. Die dortigen Beweise zu (b) und (c) sind auch mit P', s' statt C,t verwendbar. Zum Eindeutigkeitsnachweis in (a) gehört bei beliebigem P' zusätzlich die Aussage, daß s und P trotz verschiedener Wahlmöglichkeit von P' eindeutig bestimmt sind. – Für den Eindeutigkeitsnachweis kann man sich übrigens auch auf den Kongruenzsatz sww für Dreieck ABP berufen (in dem $\overline{AB}$, $\overline{\sphericalangle BAP}$ und $\overline{\sphericalangle APB}$ vorgegeben sind).

Der obige 1. Lösungsweg bietet als weitere Vereinfachung den Wegfall von t. Dem entspricht es, in den Beweisen statt des Innenwinkel- und Stufenwinkelsatzes den Außenwinkelsatz zu verwenden.

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

270734) Lösung: 7 Punkte

Man kann zunächst diejenigen Paare ermitteln, die außer der geforderten Gleichung noch $x \leqq y$ erfüllen.

I. Wenn ein Paar $(x;y)$ diese Bedingungen erfüllt, so folgt

$$3x^2 \leqq x^2 + xy + y^2 = 49 < 51,$$
$$x^2 < 17,$$

x ist eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4.

(Bemerkung: Ohne die Einschränkung $x \leqq y$ kann man aus $x^2 \leqq x^2 + xy + y^2 = 49$ schließen: x ist eine der Zahlen 0, 1, ..., 7. Die Fälle $x = 5, 6, 7$ lassen sich dann analog zum Folgenden behandeln.)

Für $x = 0$ folgt $y^2 = 49$, also $y = 7$.

Für $x = 1$ folgt $y + y^2 = 48$. Dies wird von keiner natürlichen Zahl y erfüllt;

denn wenn $y \leqq 6$ ist, so gilt $y + y^2 \leqq 6 + 36 < 48$,
und wenn $y \geqq 7$ ist, so gilt $y + y^2 \geqq 7 + 49 > 48$.

Für $x = 2$ folgt $2y + y^2 = 45$. Dies wird von keiner natürlichen Zahl y erfüllt;

denn wenn $y \leqq 5$ ist, so gilt $2y + y^2 \leqq 10 + 25 < 45$,
und wenn $y \geqq 6$ ist, so gilt $2y + y^2 \geqq 12 + 36 > 45$.

Für $x = 3$ folgt $3y + y^2 = 40$. Dies wird nur von $y = 5$ erfüllt;

denn wenn $y < 5$ ist, so gilt $3y + y^2 < 15 + 25 = 40$,
und wenn $y > 5$ ist, so gilt $3y + y^2 > 40$.

Für $x = 4$ folgt $4y + y^2 = 33$. Dies wird von keiner natürlichen Zahl y erfüllt;

denn wenn $y \leqq 4$ ist, so gilt $4y + y^2 \leqq 16 + 16 < 33$,
und wenn $y \geqq 5$ ist, so gilt $4y + y^2 \geqq 20 + 25 > 33$.

Also können nur die Paare

$$(x;y) = (0;7) \quad \text{und} \quad (x;y) = (3;5) \qquad (1)$$

die geforderte Gleichung und die Bedingung $x \leqq y$ erfüllen.

II. Sie erfüllen diese Forderungen, wie aus $0 \leq 7$, $3 \leq 5$ und[1]

$$0 + 0 \cdot 7 + 49 = 49 \quad \text{und} \quad 9 + 3 \cdot 5 + 25 = 49$$

ersichtlich ist.

Nach Weglassen der Bedingung $x \leq y$ kommen zu (1) noch genau die Paare

$$(x;y) = (7;0) \quad \text{und} \quad (x;y) = (5;3) \qquad (2)$$

hinzu. Also sind genau die in (1) und (2) genannten Paare alle gesuchten.

---

1 Statt der oben im Text folgenden Probe kann auch auf die bereits im Verlauf von Teil I vorkommenden Zahlenwerte verwiesen werden.

<u>270735) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Mit den Bezeichnungen $\overline{\sphericalangle ABC} = \beta$, $\overline{\sphericalangle ACB} = \gamma$ (Abb. L 270735) folgt aus dem Außenwinkelsatz für Dreieck BCS und aus der Voraussetzung

$$4\alpha = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2},$$

$$8\alpha = \beta + \gamma.$$

Ferner ist nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC

$$\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha .$$

Somit folgt $8\alpha = 180^\circ - \alpha$,

$$9\alpha = 180^\circ;$$

damit ergibt sich, daß durch die Voraussetzung eindeutig bestimmt ist:

$$\alpha = 20^\circ.$$

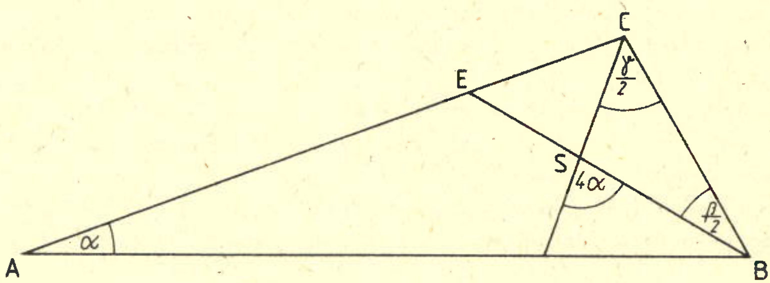

Abb. L 270735

270736) Lösung: 6 Punkte

Wegen $\overline{BD} = \overline{DC}$ und der gemeinsamen zu diesen Seiten gehörenden Höhe haben die Dreiecke BDS und DCS einander gleichen Flächeninhalt; dieser sei mit A_1 bezeichnet.
Ebenso haben CES und EAS einander gleichen Flächeninhalt A_2 sowie AFS und FBS einander gleichen Flächeninhalt A_3 (Abb. L 270736).
Wegen $\overline{AF} = \overline{FB}$ und der gemeinsamen zu diesen Seiten gehörenden Höhe haben die Dreiecke AFC und FBC einander gleichen Flächeninhalt,

also gilt $A_3 + 2A_2 = A_3 + 2A_1$.
Daraus folgt $A_1 = A_2$.
Ebenso ergibt sich $A_1 = A_3$.

Damit ist der verlangte Beweis geführt.

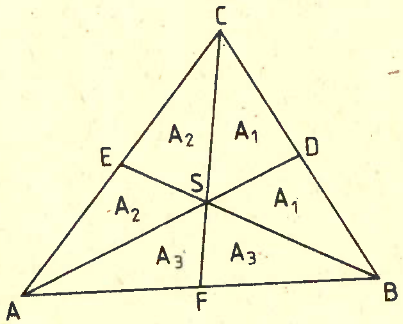

Abb. L 270736