

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 6

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfelinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

270621

Über einen 100 m-Lauf, den die drei Schüler Jens, Michael und Peter austrugen, wurden folgende Vorhersagen gemacht:

Frank sagte: "Jens oder Peter wird gewinnen."

Horst sagte: "Wenn Jens nicht gewinnt, dann gewinnt Michael."

Norbert sagte: "Wenn Michael gewinnt, dann wird Jens Zweiter."

Stefan sagte: "Michael wird schlechter abschneiden als Jens und Peter."

- (a) Nach dem Lauf wurde festgestellt: Alle vier Voraussagen sind wahre Aussagen.
(b) Nach dem Lauf wurde festgestellt: Als einziger hatte Horst eine wahre Aussage gemacht.

Gib in beiden Fällen (a), (b) an, wer Erster, Zweiter bzw. Dritter wurde!

In beiden Fällen (a), (b) ist noch bekannt, daß Jens, Peter und Michael alle drei verschiedene Zeiten liefen.

Erkläre, wie du deine Angaben gefunden hast!

270622

- (a) Bei einem Wettkampf, an dem sich genau vier Mannschaften A, B, C und D beteiligten, spielte jede dieser Mannschaften gegen jede andere dieser Mannschaften genau ein Spiel. Zähle diese Spiele auf!
(b) Bei einem anderen Wettkampf spielte ebenfalls jede der teilnehmenden Mannschaften gegen jede andere der teilnehmenden

A 6

Mannschaften genau ein Spiel. So kamen genau 21 Spiele zustande.

Wie viele Mannschaften nahmen insgesamt an diesem Wettkampf teil?

Zeige, daß bei der von dir angegebenen Anzahl von Mannschaften genau 21 Spiele zustandekommen!

270623

(a) Der Stundenzeiger einer Uhr

(Abb. A 270623a) zeigt um 3.42 Uhr in die Lücke zwischen den Zahlen 3 und 4, der Minutenzeiger in die Lücke zwischen 8 und 9. Dadurch wird das Zifferblatt so aufgeteilt,

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$$

daß in einem Teil die Summe

$$9 + 10 + 11 + 12 + 1 + 2 + 3 = 48$$

steht.

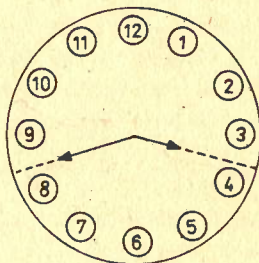


Abb. A 270623a

Gesucht werden Uhrzeiten folgender Art: Jeder Zeiger zeigt in eine der zwölf Lücken zwischen benachbarten Zahlen, und dadurch wird das Zifferblatt in zwei Teile aufgeteilt, in denen die gleiche Summe steht.

Nenne zwei solche Uhrzeiten zwischen 0.00 Uhr und 12.00 Uhr, die sich voneinander um mehr als 5 Minuten unterscheiden!

(b) Bei einer anderen Uhr (Abb. A 270623b)

zeigt 57 Sekunden nach 3.42 Uhr der Sekundenzeiger in die Lücke zwischen den Zahlen 11 und 12.

Hierdurch und durch die anderen Zeiger wird das Zifferblatt in Teile mit den Summen

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30,$$

$$9 + 10 + 11 = 30,$$

$$12 + 1 + 2 + 3 = 18$$

aufgeteilt.

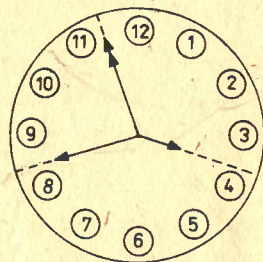


Abb. A 270623b

Warum gibt es keine Uhrzeit, bei der (jeder Zeiger in eine der zwölf Lücken zeigt und) das Zifferblatt in drei Teile aufgeteilt wird, in denen die gleiche Summe steht?

A 6

270624

In einer Werkhalle stehen vier Maschinen zur Herstellung von Werkstücken. Jeweils in 24 Stunden werden auf Maschine A genau 2 Werkstücke, auf Maschine B genau 3 Werkstücke, auf Maschine C genau 8 Werkstücke, auf Maschine D genau 12 Werkstücke hergestellt. Für jede der Maschinen gilt, daß zum Herstellen der Werkstücke auf dieser Maschine stets die gleiche Zeit gebraucht wird. Dabei ist die Zeiteinteilung so angelegt, daß jeweils die Herstellung des nächsten Werkstückes genau dann beginnt, wenn das vorhergehende fertig ist.

An einem Tag beginnen alle vier Maschinen gleichzeitig um 0.00 Uhr mit der Herstellung eines neuen Werkstückes. Wie oft kommt es an diesem Tag bis einschließlich 24.00 Uhr insgesamt vor, daß

- (a) auf allen vier Maschinen,
 - (b) auf genau drei der vier Maschinen,
 - (c) auf genau zwei der vier Maschinen
- zum gleichen Zeitpunkt ein Werkstück fertig wird?

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 6

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

270621) Lösung:

8 Punkte

(a) Nach Stefans Aussage wurde Michael Dritter.

Jens muß gewonnen haben; denn andernfalls ergäbe sich aus Horsts Vorhersage die falsche Aussage, daß Michael gewonnen hätte.

Also wurde Jens Erster und Peter Zweiter.

(b) Da Franks Aussage falsch war, hat Michael gewonnen.

Deshalb, und weil Norberts Aussage falsch war, kann Jens nicht Zweiter geworden sein; folglich wurde er Dritter und Peter Zweiter.

Anderer Lösungsweg:

Die folgende Tabelle zeigt alle Möglichkeiten für den ersten, zweiten und dritten Platz. Bei jeder Möglichkeit ist angegeben, welche Vorhersage wahr und welche falsch ist.

Platz			Aussage			
1	2	3	F	H	N	S
J	M	P	W	W	W	F
J	P	M	W	W	W	W
M	J	P	F	W	W	F
M	P	J	F	W	F	F
P	J	M	W	F	W	W
P	M	J	W	F	W	F

(a) Die einzige Platzverteilung, bei der alle vier Vorhersagen wahr sind, ist demnach:

1. Jens, 2. Peter, 3. Michael.

(b) Die einzige Platzverteilung, bei der Horsts Vorhersage wahr ist und die anderen falsch sind, ist:

1. Michael, 2. Peter, 3. Jens.

Hinweise zur Korrektur:

1. Bei einem Vorgehen wie im ersten Lösungsweg ist eine Probe (Überprüfung, ob in (a) alle vier Aussagen wahr sind, in (b) genauso Horsts Aussage wahr ist) zu einer vollständigen Lösung nicht erforderlich, da die Existenz von Platzverteilungen mit diesen Wahrheitswerten dem Aufgabentext entnommen werden kann.
2. Im zweiten Lösungsweg ist auf den - für Schüler oft ungewohnten Sachverhalt zu achten, daß eine Aussage "Wenn A, dann B" nur dann falsch ist, wenn A wahr und B falsch ist.

270622) Lösung:10 Punkte

- (a) Die Spiele (bezeichnet durch Hintereinanderschreiben der Buchstaben) sind
AB, AC, AD, BC, BD, CD.
- (b) Kommt noch eine fünfte Mannschaft E hinzu, so ergeben sich außer diesen sechs Spielen noch weitere vier (AE, BE, CE, DE), insgesamt also zehn Spiele.
Kommt eine sechste Mannschaft hinzu, so ergeben sich zusätzlich genau die fünf weiteren Spiele, die sie mit A, B, C, D, E auszutragen hat, insgesamt also 15 Spiele.
Eine siebente Mannschaft hat genau sechs weitere Spiele (nämlich die mit den bisher genannten sechs Mannschaften) auszutragen.
Damit ist gezeigt, daß bei sieben Mannschaften genau 21 Spiele zustandekommen.

Hinweis zur Korrektur: Ein Nachweis, daß 7 die einzige Anzahl ist, die zu (b) anzugeben ist, wird vom Schüler nicht verlangt.

270623) Lösung:12 Punkte

- (a) Anzugeben ist eine Uhrzeit zwischen 3.45 Uhr und 3.50 Uhr sowie eine Uhrzeit zwischen 9.15 Uhr und 9.20 Uhr.
Zur Überprüfung beider Angaben ist die Gleichheit der Summen

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 (= 39),$$

$$10 + 11 + 12 + 1 + 2 + 3 (= 39)$$
zu bestätigen.
- (b) Die Summe aller zwölf Zahlen des Zifferblattes beträgt 78.
Gäbe es eine Uhrzeit der genannten Art, so müßte wegen $78 : 3 = 26$ in jedem der Teile die Summe 26 stehen. Daß dies nicht möglich ist, kann z. B. folgendermaßen gezeigt werden:

L 6

Die Zahl 10 kann nicht als erster Summand auftreten, da $10 + 11 < 26$ und bereits $10 + 11 + 12 > 26$ ist, also alle weiteren Summen mit 10 als erstem Summanden erst recht größer als 26 sind.

Die Zahl 10 kann nicht als zweiter Summand auftreten, da $9 + 10 < 26$ und bereits $9 + 10 + 11 > 26$ ist, also alle weiteren Summen mit 10 als zweitem Summanden erst recht größer als 26 sind.

Die Zahl 10 kann aber auch nicht als dritter oder weiterer Summand auftreten, da bereits $8 + 9 + 10 > 26$ ist, also alle anderen Summen, in denen 10 als dritter oder weiterer Summand auftritt, erst recht größer als 26 sind.

270624) Lösung:

10 Punkte

Die Zeitpunkte, zu denen Werkstücke fertig werden, sind die folgenden Uhrzeiten:

Ma- schine	Uhrzeiten											
A	12										24	
B	8				16						24	
C	3	6	9	12	15	18	21	24				
D	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24

Daraus ist ersichtlich:

Es kommt insgesamt

(a) genau einmal (nämlich um 24.00 Uhr)

(b) genau einmal (nämlich um 12.00 Uhr für A, C, D)

(c) genau viermal (nämlich um 6.00 Uhr und 18.00 Uhr für C, D sowie um 8.00 und 16.00 Uhr für B, D)

vor, daß auf (a) allen, (b) genau drei bzw. (c) genau zwei Maschinen zum gleichen Zeitpunkt ein Werkstück fertig wird.

Hinweise: Die Angabe der einzelnen Uhrzeiten und Maschinenkombinationen wird nicht vom Schüler verlangt; aus der Lösungsdarstellung des Schülers soll nur ersichtlich sein, wie er die anzugebenden Anzahlen (von Zeitpunkten) gefunden hat. Beispiels-

L 6

weise genügt es, in der obenstehenden Tabelle die zahlenmäßige Angabe der Uhrzeiten durch einheitliche Punkt- oder Strichsymbole zu ersetzen. Bei einer solchen Darstellung muß allerdings die unterschiedliche Verteilung der Zeitpunkte ersichtlich sein (auf die man bei zahlenmäßiger Wiedergabe verzichten könnte).

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 6 Gesamtpunktzahl: 40

270621

richtiges Ergebnis zu a)	2 Punkte
richtiges Ergebnis zu b)	2 Punkte
Erläuterung der Lösung	<u>4 Punkte</u>
	8 Punkte

270622

Aufzählung der Spiele (Für jede fehlende Angabe eines Spiels ist je 1 Punkt abzuziehen.)	4 Punkte
Angabe der Anzahl von Mannschaften (Wird der angegebene Lösungsweg beschritten, aber nicht bis zu Ende geführt, sind für die Angabe der Anzahl von Spielen bei einer Teilnahme von fünf bzw. sechs Mannschaften je 2 Punkte zu erteilen.)	6 Punkte
	<u>10 Punkte</u>

270623

(a) Angabe der Uhrzeiten (Für jede richtig genannte Uhrzeit sind je 2 Punkte zu erteilen.)	4 Punkte
Überprüfung (Es ist je 1 Punkt für die Überprüfung einer angegebenen Lösung zu erteilen.)	2 Punkte
(b) Begründung (Für die Feststellung, daß jedes der drei Teile die Summe 26 haben müßte, sind 2 Punkte zu erteilen.)	6 Punkte
	<u>12 Punkte</u>

270624

richtige Angabe zu (a)	2 Punkte
richtige Angabe zu (b)	4 Punkte
richtige Angabe zu (c)	<u>4 Punkte</u>
	10 Punkte