XXVII. Olympiade Junger Mathematiker

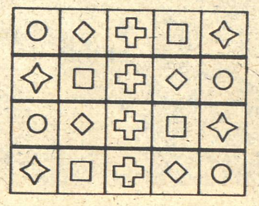
der Deutschen Demokratischen Republik

Achtung: Es wird im allgemeinen jeweils nur einer der möglichen Lösungswege angegeben. Die Teilnehmer können auch andere als die angegebenen Lösungswege benutzen.
Alle exakten und vollständigen Lösungen gelten als gleichwertig.
Infolge Benutzung verschiedener Hilfsmittel bzw. Rechenwege können bei manchen Lösungen geringfügige zahlenmäßige Abweichungen auftreten.

Anmerkung: ∢ ABC bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels ∢ ABC.

Olympiadeklasse 5

270511) Lösung:
Siehe Abbildung L 2705511a bis e



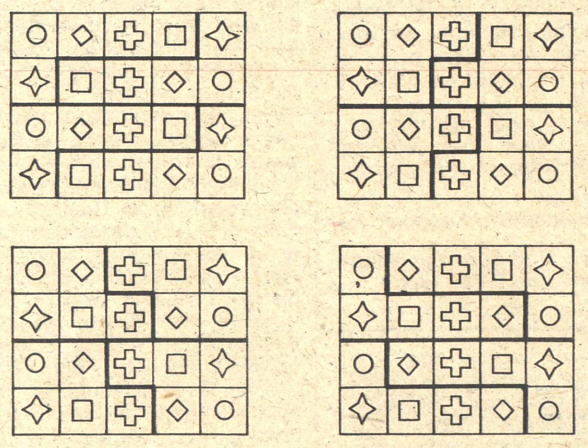


Abb. L 270511

Hinweis: Durch systematisches Erfassen der Zerlegungen kann man feststellen, daß es keine weiteren gibt.

270512) Lösung
Da die größere Teilstrecke genau 47mal so lang sein soll wie die kleinere, müssen genau 48 solcher kleinen Teile zusammengesetzt eine Strecke ergeben, die genau so lang ist wie die ganze Strecke.

Wegen 240:48 = 5 muß also die kleinere Teilstrecke 5 mm lang sein, und wegen 240-5 = 235 muß die größere Teilstrecke 235 mm lang sein.

Hinweis: Eine Überprüfung (im Aufgabentext nicht gefordert) zeigt, daß diese beiden Längen alle Forderungen erfüllen: Es gilt 5+235 = 240 und 5·47 = 235.

270513) Lösung:
Alle derartigen Rechtecke sind
ABHG, ABLK, ACFD, BCJH, BCML, DELK, DFJG, EFML, GJMK.

270514) Lösung:
Es gibt zu a) und b) jeweils mehrere Lösungen, z. B.
a) J,M,L,K,J,H,A,B,C,B,L,D,C,D,M,F,D,E,F,G,H,B,K,H,G,F,J,
b) U,V,U,W,V,X,W,Y,X,P,Q,V,P,Y,Q,P,Q,R,S,T,R,Z,T,U,T,W,Z,Y,R,Q.
Für alle Lösungen gelten die Aussagen zu c).
c) Jeder Zug bei a) endet im gewählten Anfangspunkt. (Man sagt dafür auch: Der Zug ist ein "geschlossener Weg". Dabei kann jeder Punkt Anfangs- und damit auch Endpunkt sein.)
Die Züge bei b) beginnen alle entweder im Punkt U oder im Punkt Q und enden je nachdem im Punkt Q oder im Punkt U. Anfangs- und Endpunkt fallen also bei b) nicht zusammen, es handelt sich um einen "offenen Weg".

Hinweis: Es gibt Merkmale, an denen man von vornherein erkennen kann, ob sich eine Figur in einem Zuge zeichnen läßt und ob dabei der durchlaufene Weg geschlossen oder offen ist. Man betrachtet dazu die Punkte der Figur und unterscheidet bei ihnen gerade und ungerade Punkte, je nachdem, ob sich in ihnen eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Linien trifft.
Die folgenden Aussagen lassen sich beweisen:
(1) Jede Figur ohne ungerade Punkte läßt sich in einem Zug zeichnen. Dabei kann jeder ihrer Punkte als Anfangspunkt gewählt werden und ist dann auch Endpunkt.
Eine Figur kann, falls überhaupt, nur eine gerade Anzahl ungerader Punkte haben.
(2a) Hat sie genau zwei ungerade Punkte, so läßt sie sich in einem Zuge zeichnen, sofern einer der beiden ungeraden Punkte als Anfangspunkt gewählt wird; der andere ungerade Punkt ist dann Endpunkt.
(2b) Besitzt die Figur mehr als zwei ungerade Punkte, kann sie nicht in einem Zug gezeichnet werden.

Olympiadeklasse 6

270611) Lösung:
Die Abbildung L 270611 zeigt zwei Möglichkeiten:

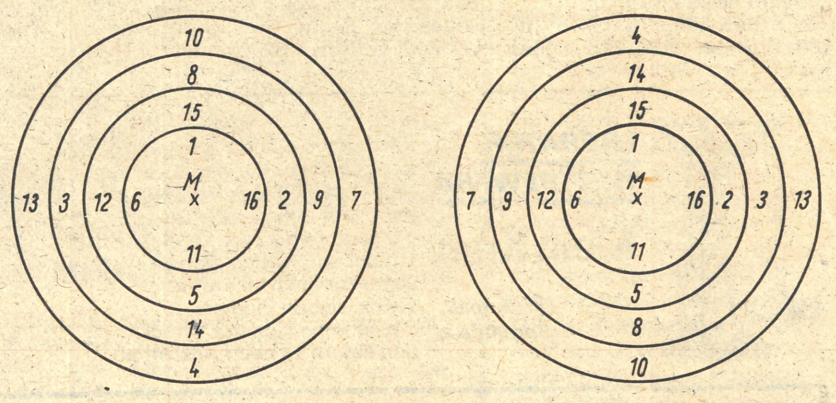


Abb. L 270611

Hinweis: Durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle kann man nachweisen, daß dies die einzigen Möglichkeiten sind, abgesehen von einer Drehung der gesamten Figur um einen beliebigen Winkel.

270612) Lösung:
Es gibt die folgenden Eintragungen, von denen laut Aufgabenstellung mindestens zwei anzugeben sind:

1	3	5	2
4	1	3	5
2	4	1	3
5	2	4	1

1	3	5	2
4	1	3	5
2	5	1	3
5	2	4	1

1	4	2	5
3	1	4	2
5	3	1	4
2	5	3	1

1	4	2	5
3	1	5	2
5	3	1	4
2	5	3	1

1	4	2	5
4	1	5	2
2	5	1	4
5	2	4	1

1	4	2	5
5	1	4	2
2	5	1	4
4	2	5	1

1	5	2	4
4	1	5	2
2	4	1	5
5	2	4	1

1	5	2	4
5	1	4	2
2	4	1	5
4	2	5	1

Hinweis: Wie man durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle nachprüfen kann, gibt es keine weiteren Eintragungen der geforderten Art.

270613) Lösung:
Die Reihenfolge lautet:
Frank, Andreas, Stefan, Dirk, Jürgen, Peter, Michael.
Überprüfung:
zu (1): Frank ist schwerer als Andreas und als Dirk.
zu (2): Andreas ist schwerer als Stefan, und dieser ist schwerer als Dirk.
zu (3): Jürgen ist schwerer als Peter, und dieser ist schwerer als Michael.
zu (4): Dirk ist schwerer als Jürgen.

Hinweis: Man kann auch nachweisen, daß die Reihenfolge der Jungen eindeutig aus den Angaben (1) bis (4) folgt.
Den Nachweis kann man so schreiben, daß die Jungen mit den An-

fangsbuchstaben ihres Vornamens bezeichnet werden und daß $x > y$ bedeutet: x ist schwerer als y.

Aus (1) folgt nämlich $A < F$, $A > D$,
aus (2) folgt $S < A$, $S > D$ } also $F > A > S > D$.
Aus (3) folgt $P < J$, $P > M$,
aus (4) folgt $J < D$ } also $D > J > P > M$.
Damit ergibt sich $F > A > S > D > J > P > M$.

270614) Lösung:

(1) Die Anzahl ist a) 4, b) 8, c) 16.
(2) Als weitere Anzahlen nach dem fünften, sechsten, ... Schnitt usw. treten auf: 32, 64, 128, 256, ... und dann noch größere Anzahlen (nämlich jeweils das Doppelte der vorangehenden Anzahl). Daher kommt unter den auftretenden Anzahlen die Zahl 160 nicht vor.

Olympiadeklasse 7

270711) Lösung:

Das Zifferblatt könnte so zersprungen sein, wie Abbildung L 270711 zeigt. Dies überprüft man, indem man bestätigt, daß

$11+12+1+2 = 3+4+9+10 = 5+6+7+8 = 26$

gilt.

Hinweis: Man kann das Aufsuchen dieser Lösung mit folgender Überlegung beginnen: Da die Summe aller Zahlen des Zifferblattes 78 beträgt, muß die Summe auf jedem der drei Teilstücke $78:3 = 26$ betragen.

Durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle kann man dann sogar zeigen, daß die angegebene Aufteilung der 12 Zahlen in drei Mengen (die auf drei Flächenstücken des Zifferblattes stehen können) die einzige ist, für die die von Klaus gemachte Feststellung zutrifft.

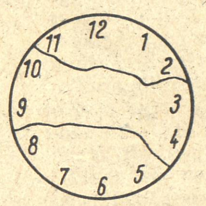


Abb. L 270711

270712) Lösung:

a) Ein solches Herausgreifen ist möglich.
Die größtmögliche Anzahl herausgegriffener Kugeln, unter denen sich keine 12 von gleicher Farbe befinden, ergibt sich nämlich, indem man 11 rote, 11 blaue, 11 grüne und alle 10 schwarzen oder weißen Kugeln herausgreift; das sind 43 Kugeln. Greift man also (mindestens) 44 Kugeln heraus, so kann man folglich mit Sicherheit vorhersagen, daß sich darunter mindestens 12 von gleicher Farbe befinden müssen.

b) Ein solches Herausgreifen ist nicht möglich.
Denn greift man, wie verlangt, nicht alle Kugeln heraus, so ist (unter den angegebenen Voraussetzungen) auch der Fall möglich, daß sich von Anfang an überhaupt nur eine schwarze Kugel in der Kiste befand und daß (mindestens) gerade diese Kugel nicht mit herausgegriffen wird.

c) Auch ein solches Herausgreifen ist nicht möglich.
Denn es ist (unter den angegebenen Voraussetzungen) auch der Fall möglich, daß sich von Anfang an weniger als 5 weiße Kugeln in der Kiste befanden und folglich bei keinem Herausgreifen 5 weiße genommen werden.

270713) Lösung:

In jedem Dreieck gilt: Eine Seite ist stets kleiner als die Summe und stets größer als die Differenz der beiden anderen Seiten. Folglich gilt laut Aufgabe $2\text{ cm} < c < 10\text{ cm}$, wobei c die Länge der dritten Seite des betrachteten Dreiecks ist.
Da nach Voraussetzung die Maßzahl von c gerade und von 4 und 6 verschieden ist, erfüllt nur $c = 8$ cm alle Bedingungen.
Der Umfang u des Dreiecks läßt sich somit eindeutig ermitteln, und es gilt:

$u = 6\text{ cm} + 4\text{ cm} + 8\text{ cm} = 18\text{ cm}.$

270714) Lösung:

a) Das Fünfeck hat genau fünf und das Sechseck genau neun Diagonalen, wie man z. B. der Abbildung L 270714 entnehmen kann.

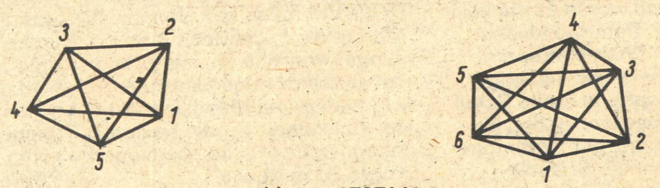


Abb. L 270714

b) Um in einem n-Eck alle Diagonalen zu erfassen, kann man für jeden der n Eckpunkte die Verbindungsstrecke zu jedem anderen Eckpunkt außer den beiden benachbarten Eckpunkten betrachten.
Damit hat man insgesamt $n \cdot (n - 3)$mal eine Strecke betrachtet, und zwar jede Diagonale des n-Ecks genau 2mal.
Bezeichnet man die Anzahl der Diagonalen mit x, so gilt demzufolge

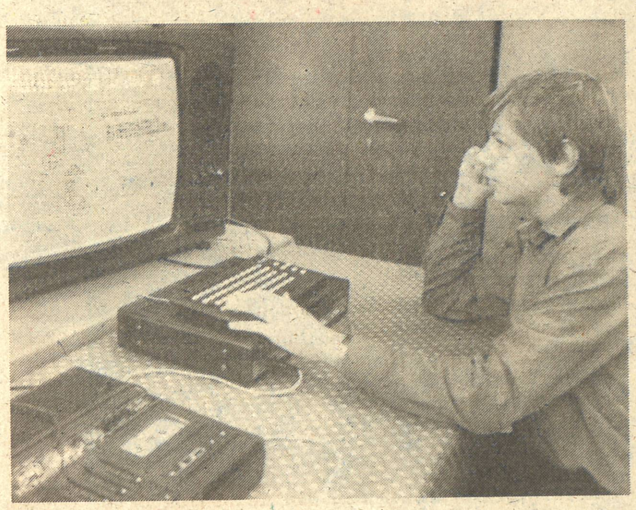
$$x = \frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

c) Für $n = 3$ gibt diese Formel den Wert

$$x = \frac{3 \cdot (3-3)}{2} = \frac{3 \cdot 0}{2} = 0.$$

Er läßt sich in die Aussage fassen, daß bei jedem Dreieck die Anzahl der Diagonalen gleich Null ist.

Mike und die Variablen



Der Montag und der Dienstag sind bei Mike immer ausgebucht. Wer ihn kennt, weiß, wo er zu finden ist: in der Station Junger Naturforscher und Techniker Nossen. Dort sitzt er bestimmt an einem Computer, überlegt sich Programme, knobelt und rechnet, bis der Kopf raucht. Auf diesem Gebiet kann ihm so leicht keiner etwas vormachen. Mike weiß, wovon er spricht. Gerade in den Naturwissenschaften, denn die sind sein Hobby. Besonders die Physik und die Chemie haben es ihm angetan. Jede Schulstunde bringt ihm neue Erkenntnisse, läßt ihn tiefer in die Geheimnisse der Natur blicken. Doch der 14jährige Junge aus Rhäsa (Kreis Meißen) will mehr wissen. Nur gut, daß es die Station Junger Techniker und Naturforscher gibt, für die Mike vor sieben Jahren sein Herz entdeckt hat. Damals, in der 2. Klasse, fing er mit der Arbeitsgemeinschaft Basteln an, wechselte dann zu den Flugmodellbauern über und beschäftigte sich gleichzeitig mit dem Abc der Elektronik. Das tut er heute noch. Der Dienstagnachmittag ist der Arbeitsgemeinschaft Informatik vorbehalten, der Mike seit dem vergangenen Jahr angehört. „Und er ist nicht einfach nur so dabei, er ist einer der aktivsten Informatiker", sagt Hartmut Reif, pädagogischer Mitarbeiter der Station.

Als Ausgleich für angestrengtes Denken zieht es Mike immer wieder nach draußen, zum Fußball, Schwimmen und Radfahren. Und als Agitator ist er eine anerkannte Autorität, denn auch über das Weltgeschehen ist er stets gut informiert. Er gibt sein Wissen bereitwillig weiter und ist auch dankbar für Hilfe. Zuweilen ist er ganz froh, daß er in Russisch einen sprachbegabten Klassenkameraden neben sich hat.

Übrigens fällt Mike auch die Mathematik nicht einfach in den Schoß. Manchmal brütet er sehr angestrengt über einer schwierigen Aufgabe. Er fordert sich ganz. Jetzt behandeln sie in der Schule gerade Rechenoperationen mit Variablen. Oft setzt sich Mike zu Hause hin und übt. Er tut's, damit die vielen unbekannten Variablen ihm nicht unbekannt bleiben.

Grit Martin