XXVII. Olympiade Junger Mathematiker

der Deutschen Demokratischen Republik 1. Stufe (Schulolympiade)

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen werden im Oktober 1987 veröffentlicht.

Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärkeren Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

Anmerkung: $\sphericalangle ABC$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

270511

Jemand will die abgebildete Figur (Abb. A 270511) in genau vier Teile zerschneiden. Keines der 20 kleinen Quadrate soll dabei zerschnitten werden. Die vier Teile sollen sich so übereinander legen lassen, daß sie sich dann völlig gleichen (gleiche Gestalt und gleiche Verteilung der Muster).

Es gibt fünf Möglichkeiten für eine derartige Zerlegung.

Zeichne diese fünf Zerlegungen!

Eine Begründung wird nicht verlangt.

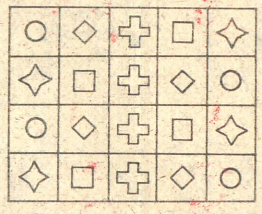


Abb. A 270511

270512

Eine Strecke von 240 mm Länge soll in zwei Teilstrecken zerlegt werden. Die größere Teilstrecke soll genau 47mal so lang sein wie die kleinere. Wie lang muß dann die kleinere Teilstrecke sein und wie lang die größere?

Begründe deine Antwort!

Die Lösungen bringen wir in der Nummer 39/87

270513

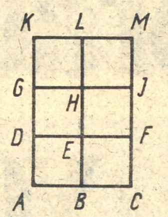


Abb. A 270513

Die Abbildung A 270513 zeigt ein Rechteck ACMK, das aus sechs kleinen Quadraten zusammengesetzt ist. Man kann in der Abbildung außer diesem Rechteck noch weitere Rechtecke finden, die sich aus solchen kleinen Quadraten zusammensetzen und die selbst keine Quadrate sind. Zum Beispiel ist DFJG ein derartiges Rechteck.

Nenne alle derartigen Rechtecke außer ACMK!

Eine Begründung wird nicht verlangt.

270514

a) Die Figur der Abbildung A 270514a soll so "in einem Zuge" gezeichnet werden, daß dabei keine Linie zweimal durchlaufen wird.

Ein solcher "Zug" kann z. B. im Punkt L beginnen und über die Punkte M, J, K, L, B, A, H, G, H, J, F, G, F, M, D, F, E, D, C, B, H, K, B, C, D nach Punkt L zurückführen.

Suche mindestens einen weiteren derartigen "Zug" und schreibe ihn wie im Beispiel mit Hilfe der bei ihm zu durchlaufenden Punkte auf!

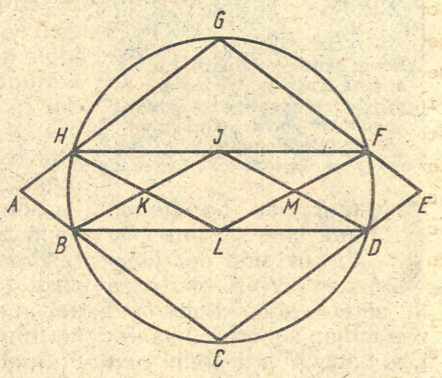


Abb. A 270514a

b) Auch die Figur der Abbildung A 270514b läßt sich in einem Zuge so zeichnen, daß jede Linie genau einmal durchlaufen wird.

Gib mindestens einen derartigen "Zug" an!

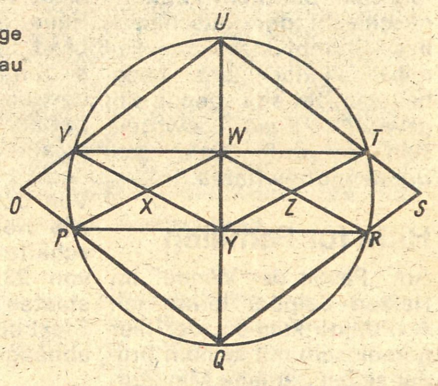


Abb. A 270514b

c) Vergleiche Anfangs- und Endpunkt der von dir in den Abbildungen A 270514a und b gefundenen Wege! Was stellst du fest?

Olympiadeklasse 6

270611

Vier Kreisscheiben (Abb. A 270611) sind jede für sich um ihren gemeinsamen Mittelpunkt M so zu drehen, daß danach immer vier Zahlen auf je einem Strahl mit dem Anfangspunkt M liegen.

Dabei soll die Summe der vier Zahlen auf jedem Strahl 34 betragen.

Gib mindestens eine Möglichkeit solcher Drehungen an!

Eine Begründung wird nicht verlangt.

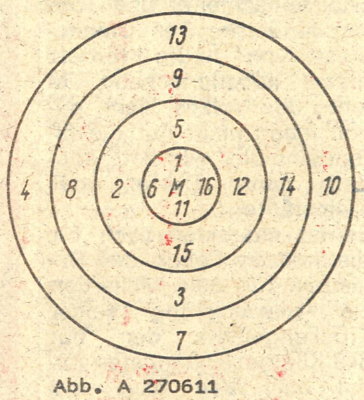


Abb. A 270611

270612

In jedes leere Feld des abgebildeten Quadrats (Abb. A 270612) ist eine der Zahlen 2, 3, 4, 5 einzutragen. Dabei soll in keiner Spalte oder Zeile eine dieser Zahlen mehrfach vorkommen. Ferner soll in keiner Spalte oder Zeile neben einer Zahl deren Nachfolger oder Vorgänger stehen.

Gib mindestens zwei solche Eintragungen an!

Eine Begründung wird nicht verlangt.

1			
	1		
		1	
			1

Abb. A 270612

(Hinweis: Es gibt sogar mehr als zwei solche Eintragungen.)

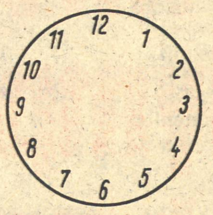
270613
Auf einer Wippe stellt sich heraus:
(1) Andreas ist leichter als Frank, aber schwerer als Dirk.
(2) Stefan ist leichter als Andreas, aber schwerer als Dirk.
(3) Peter ist leichter als Jürgen, aber schwerer als Michael.
(4) Jürgen ist leichter als Dirk.
Ordne die Jungen nach ihrem Gewicht; beginne bei dem schwersten! Überprüfe, ob bei der von dir angegebenen Reihenfolge alle Aussagen (1) bis (4) wahr sind!

270614
Kerstin zerschneidet ein rechteckiges Stück Papier so, daß der Schnitt vom Mittelpunkt einer Rechteckseite zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verläuft. Es entstehen zwei kleinere Rechtecke; Kerstin legt sie genau übereinander, so daß nur noch ein kleineres Rechteck zu sehen ist, das aus zwei Schichten besteht.
Kerstin zerschneidet dieses aus zwei Schichten bestehende Rechteck in gleicher Weise und legt wieder die entstandenen rechteckigen Papierstücke genau übereinander.
Entsprechend wird fortgesetzt: Übereinanderliegende Rechtecke werden zerschnitten, die entstandenen Papierstücke werden übereinandergelegt. (Natürlich geht das nicht beliebig oft; denn der Papierstapel, der zerschnitten werden soll, wird immer dicker.)
(1) Nenne die Anzahl der Papierstücke, die nach dem
a) zweiten, b) dritten, c) vierten
Zerschneiden entstanden sind!
(2) Angenommen, das Zerschneiden wäre beliebig oft möglich. Warum könnten dann trotzdem niemals nach einem Schnitt genau 160 Papierstücke entstehen?

Olympiadeklasse 7

270711
Klaus ließ versehentlich seinen Wecker zu Boden fallen. Dabei zersprang das Zifferblatt (vgl. Abb. A 270711) in drei Flächenstücke. Nachdem der erste Schreck über das Mißgeschick vorüber war, bemerkte Klaus, daß keine der 12 Zahlen beim Zerspringen des Zifferblattes auseinandergerissen worden war. Er berechnete für jedes der drei Flächenstücke die Summe derjenigen Zahlen, die auf diesem Flächenstück standen. Dabei stellte er fest, daß sich in allen drei Fällen dieselbe Summe ergab.
Wie könnte das Zifferblatt zersprungen sein? Gib eine Möglichkeit hierfür an und überprüfe, daß die von Klaus gemachte Feststellung für deine Angabe zutrifft!

Abb. A 270711



270712
In einer Kiste befinden sich genau 100 Kugeln, und zwar 30 rote, 30 blaue, 30 grüne sowie 10 Kugeln, von denen nur bekannt ist, daß sie schwarz oder weiß sind und daß mindestens eine schwarze Kugel dabei ist. Durch das Tastgefühl lassen sich verschiedenfarbige Kugeln nicht voneinander unterscheiden.
Untersuche, ob es trotzdem möglich ist, mit geschlossenen Augen eine jeweils geeignete Anzahl von Kugeln, aber nicht alle, so herauszugreifen, daß man mit Sicherheit vorhersagen kann:
a) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 12 Kugeln von gleicher Farbe.
b) Unter den herausgegriffenen Kugeln befindet sich mindestens eine schwarze Kugel.
c) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 5 weiße Kugeln.

270713
In einem Dreieck seien die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden. Bekannt ist a = 6 cm und b = 4 cm.
Untersuche, ob aus diesen Angaben der Umfang des Dreiecks eindeutig ermittelt werden kann! Ist dies der Fall, dann gib den Umfang an!

270714
Bekanntlich hat jedes Viereck genau zwei Diagonalen.
a) Ermittle die Anzahl der Diagonalen eines Fünfecks und eines Sechsecks!
b) Finde eine Formel für die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks in Abhängigkeit von der Eckenzahl n des Vielecks! Die Formel soll für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gelten. Begründe diese Formel!
c) Welchen Wert gibt diese Formel, wenn man sie für n = 3 anwendet? Läßt sich auch dieser Wert in eine geometrisch anschauliche Aussage fassen?