

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker

der Deutschen Demokratischen Republik

Achtung: Es wird im allgemeinen jeweils nur einer der möglichen Lösungswege angegeben. Die Teilnehmer können auch andere als die angegebenen Lösungswege benutzen.

Alle exakten und vollständigen Lösungen gelten als gleichwertig.

Infolge Benutzung verschiedener Hilfsmittel bzw. Rechenwege können bei manchen Lösungen geringfügige zahlenmäßige Abweichungen auftreten.

Anmerkung: \sphericalangle ABC bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels \sphericalangle ABC.

Olympiadeklasse 5

270511) Lösung:

Siehe Abbildung L 270511a bis e

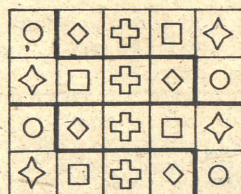
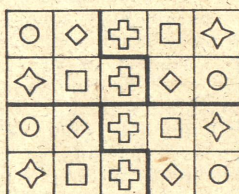
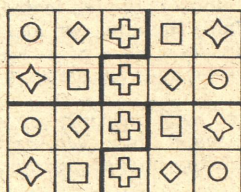
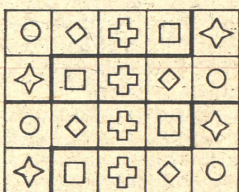
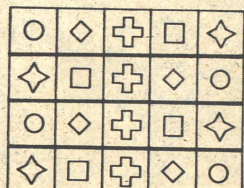


Abb. L 270511

Hinweis: Durch systematisches Erfassen der Zerlegungen kann man feststellen, daß es keine weiteren gibt.

270512) Lösung:

Da die größere Teilstrecke genau 47mal so lang sein soll wie die kleinere, müssen genau 48 solcher kleinen Teile zusammengesetzt eine Strecke ergeben, die genau so lang ist wie die ganze Strecke.

Wegen $240:48 = 5$ muß also die kleinere Teilstrecke 5 mm lang sein, und wegen $240-5 = 235$ muß die größere Teilstrecke 235 mm lang sein.

Hinweis: Eine Überprüfung (im Aufgabentext nicht gefordert) zeigt, daß diese beiden Längen alle Forderungen erfüllen: Es gilt $5+235 = 240$ und $5 \cdot 47 = 235$.

270513) Lösung:

Alle derartigen Rechtecke sind

ABHG, ABLK, ACFD, BCJH, BCML, DELK, DFJG, EFML, GJMK.

270514) Lösung:

Es gibt zu a) und b) jeweils mehrere Lösungen, z. B.

a) J, M, L, K, J, H, A, B, C, B, L, D, C, D, M, F, D, E, F, G, H, B, K, H, G, F, J,

b) U, V, U, W, V, X, W, Y, X, P, O, V, P, Y, Q, P, Q, R, S, T, R, Z, T, U, T, W, Z, Y, R, Q.

Für alle Lösungen gelten die Aussagen zu c).

c) Jeder Zug bei a) endet im gewählten Anfangspunkt. (Man sagt dafür auch: Der Zug ist ein "geschlossener Weg". Dabei kann jeder Punkt Anfangs- und damit auch Endpunkt sein.)

Die Züge bei b) beginnen alle entweder im Punkt U oder im Punkt Q und enden je nachdem im Punkt Q oder im Punkt U. Anfangs- und Endpunkt fallen also bei b) nicht zusammen, es handelt sich um einen "offenen Weg".

Hinweis: Es gibt Merkmale, an denen man von vornherein erkennen kann, ob sich eine Figur in einem Zuge zeichnen läßt und ob dabei der durchlaufene Weg geschlossen oder offen ist. Man betrachtet dazu die Punkte der Figur und unterscheidet bei ihnen gerade und ungerade Punkte, je nachdem, ob sich in ihnen eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Linien trifft.

Die folgenden Aussagen lassen sich beweisen:

(1) Jede Figur ohne ungerade Punkte läßt sich in einem Zug zeich-

nen. Dabei kann jeder ihrer Punkte als Anfangspunkt gewählt werden und ist dann auch Endpunkt.

Eine Figur kann, falls überhaupt, nur eine gerade Anzahl ungerader Punkte haben.

(2a) Hat sie genau zwei ungerade Punkte, so läßt sie sich in einem Zuge zeichnen, sofern einer der beiden ungeraden Punkte als Anfangspunkt gewählt wird; der andere ungerade Punkt ist dann Endpunkt.

(2b) Besitzt die Figur mehr als zwei ungerade Punkte, kann sie nicht in einem Zuge gezeichnet werden.

Olympiadeklasse 6

270611) Lösung:

Die Abbildung L 270611 zeigt zwei Möglichkeiten:

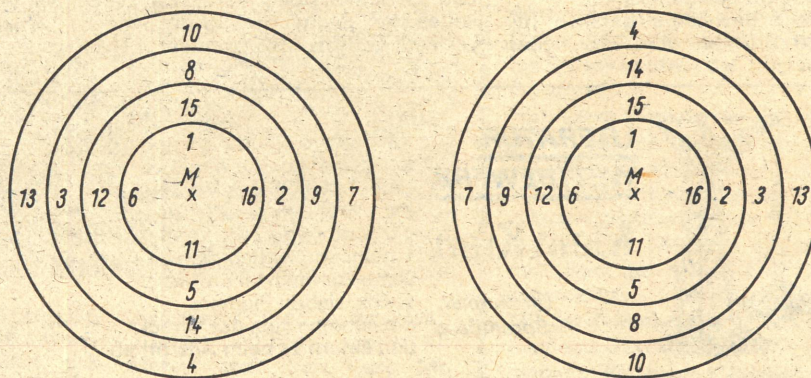


Abb. L 270611

Hinweis: Durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle kann man nachweisen, daß dies die einzigen Möglichkeiten sind, abgesehen von einer Drehung der gesamten Figur um einen beliebigen Winkel.

270612) Lösung:

Es gibt die folgenden Eintragungen, von denen laut Aufgabenstellung mindestens zwei anzugeben sind:

1	3	5	2
4	1	3	5
2	4	1	3
5	2	4	1

1	3	5	2
4	1	3	5
2	5	1	3
5	2	4	1

1	4	2	5
3	1	4	2
5	3	1	4
2	5	3	1

1	4	2	5
3	1	5	2
5	3	1	4
2	5	3	1

Hinweis: Wie man durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle nachprüfen kann, gibt es keine weiteren Eintragungen der geforderten Art.

270613) Lösung:

Die Reihenfolge lautet:

Frank, Andreas, Stefan, Dirk, Jürgen, Peter, Michael.

Überprüfung:

zu (1): Frank ist schwerer als Andreas und als Dirk.

zu (2): Andreas ist schwerer als Stefan, und dieser ist schwerer als Dirk.

zu (3): Jürgen ist schwerer als Peter, und dieser ist schwerer als Michael.

zu (4): Dirk ist schwerer als Jürgen.

Hinweis: Man kann auch nachweisen, daß die Reihenfolge der Jungen eindeutig aus den Angaben (1) bis (4) folgt.

Den Nachweis kann man so schreiben, daß die Jungen mit den An-