XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

261231
Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x;y;z)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1),(2),(3), erfüllen:

$$x + y - z = -1 \quad (1)$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1 \quad (2)$$

$$-x^3 + y^3 + z^3 = -1 \quad (3)$$

261232
Im Raum seien zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2 gegeben. Ferner seien d_1 und d_2 zwei gegebene Streckenlängen. Beweisen Sie die folgende Aussage:
Wie man auch auf g_1 Punkte P_1, P_2 mit $\overline{P_1P_2} = d_1$ und auf g_2 Punkte Q_1, Q_2 mit $\overline{Q_1Q_2} = d_2$ wählt, stets ergibt sich für das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten P_1, P_2, Q_1, Q_2 ein und derselbe Wert.

Von den nachstehenden Aufgaben 261233A und 261233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

261233A
Man untersuche, ob es vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die die folgende Eigenschaft haben: Jede dieser vier Zahlen läßt sich so in zwei positive ganzzahlige Summanden x und y zerlegen, daß sie jeweils ein Teiler von $x \cdot y$ ist.

261233B

Man beweise, daß in jedem Dreieck ABC für die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$, die Größen α, β, γ der Innenwinkel $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ sowie für den Inkreisradius ϱ und den Flächeninhalt F die Ungleichung

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} \geq \frac{27\varrho}{8F} \qquad (1)$$

gilt. Man gebe alle diejenigen Dreiecke an, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

A 11/12;II XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik 3. Stufe (Bezirksolympiade) Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

261234

Beweisen Sie: Für jedes Sehnenviereck ABCD, dessen Diagonale BD durch den Mittelpunkt N der Diagonalen AC verläuft, gilt die folgende Gleichung (1).

$$2 \cdot \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2. \qquad (1)$$

261235

Zwei Personen, A und B, spielen mit n in einer Geraden angebrachten Lampen ($n > 3$) das folgende Spiel:

Zum Spielbeginn sind alle Lampen ausgeschaltet. Eine ganze Zahl k mit $1 < k < n - 1$ wird vereinbart. Dann verläuft das Spiel so, daß die Spieler, mit A beginnend, abwechseln am Zug sind:

Jeder Spieler schaltet, wenn er am Zug ist, nach eigener Wahl eine Anzahl nebeneinanderliegender Lampen ein, mindestens eine und höchstens k. Gewonnen hat derjenige Spieler, der die letzte der n Lampen einschaltet.

Man beweise, daß der Spieler A für jedes $n > 3$ und jedes k mit $1 < k < n - 1$ durch eine geeignete Vorgehensweise (Strategie) den Gewinn erzwingen kann.

261236

Es sei (x_n) diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$x_1 = \sqrt{3} \qquad (1)$$

und

$$x_{n+1} = \sqrt{9x_n^2 + 11x_n + 3} \quad (n = 1,2,3,\ldots) \qquad (2)$$

gilt. Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ sei ferner (y_n) die durch

$$y_n = \frac{x_n}{a^n} \quad (n = 1,2,3,\ldots) \qquad (3)$$

definierte Zahlenfolge.

Man ermittle alle diejenigen $a \neq 0$, für die die Folge (y_n) konvergent ist.

30 10 08-1

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11 und 12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

261231) Lösung: 5 Punkte

I. Wenn x, y, und z reelle Zahlen sind, die das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen, so folgt:

Nach (1) ist $y = -x+z-1$. Aus (2) folgt damit

$$x^2 - (x^2 + z^2 + 1 - 2xz + 2x - 2z) + z^2 = 1, \text{ also}$$
$$xz - x + z - 1 = 0,$$
$$x(z-1) + z - 1 = 0,$$
$$(x+1)(z-1) = 0,$$
$$x = -1 \text{ oder } z = 1.$$

Für $x = -1$ ist nach (1) $y = z$, woraus aus (3) folgt:

$$1 + 2y^3 = -1$$
$$y^3 = -1$$
$$y = -1.$$

Für $z = 1$ wird ebenfalls nach (1) $y = -x$. Nach (3) ist dann

$$-2x^3 + 1 = -1$$
$$x = 1.$$

Also können nur die Tripel $(-1; -1; -1)$ und $(1; -1; 1)$ das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen.

II. Tatsächlich erfüllen diese Tripel die Gleichungen (1), (2) und (3), wie man leicht nachprüft.

261232) Lösung: 7 Punkte

Es seien auf g_1 sowohl P_1, P_2 mit $\overline{P_1P_2} = d_1$ als auch P_1', P_2' mit $\overline{P_1'P_2'} = d_1$ sowie auf g_2 sowohl Q_1, Q_2 mit $\overline{Q_1Q_2} = d_2$ als auch Q_1', Q_2' mit $\overline{Q_1'Q_2'} = d_2$ gelegen. Zu beweisen ist, daß unter diesen Voraussetzungen stets die beiden Tetraeder

$$P_1P_2Q_1Q_2 \quad \text{und} \quad P_1'P_2'Q_1'Q_2'$$

einander volumengleich sind. Dieser Beweis kann folgendermaßen geführt werden:

Es sei e die durch P_2, g_2 verlaufende Ebene.

L 11/12;I

Die beiden Tetraeder

$$P_1P_2Q_1Q_2 \quad \text{und} \quad P_1P_2Q_1'Q_2' \qquad (1)$$

(Abb. L 261232 a) haben jeweils eine in der Ebene e liegende Seitenfläche, nämlich

$$P_2Q_1Q_2 \quad \text{bzw.} \quad P_2Q_1'Q_2'. \qquad (2)$$

Diese beiden Dreiecke sind einander flächengleich, da $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_1'Q_2'}$ gilt und die zu diesen Seiten gehörenden Dreieckshöhen miteinander übereinstimmen, nämlich das Lot von P_2 auf g_2 sind.

Ferner stimmen in den Tetraedern (1) die zu den Seitenflächen (2) gehörenden Tetraederhöhen miteinander überein; sie sind nämlich das Lot von P_1 auf die Ebene e.

Also sind die beiden Tetraeder (1) zueinander volumengleich.

Ebenso beweist man, daß die beiden Tetraeder

$$P_1P_2Q_1'Q_2' \quad \text{und} \quad P_1'P_2Q_1'Q_2'$$

zueinander volumengleich sind.

Aus beiden Volumengleichheiten folgt die zu beweisende Aussage.

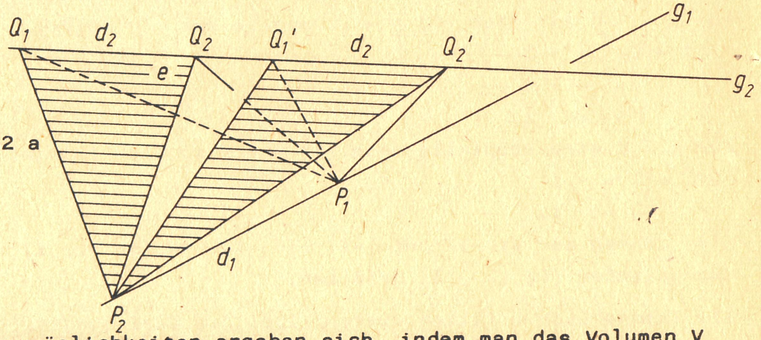

Abb. L 261232 a

<u>Andere Lösungsmöglichkeiten</u> ergeben sich, indem man das Volumen V von $P_1P_2Q_1Q_2$ durch d_1, d_2 und weitere Bestimmungsstücke, die die Lage von g_1 und g_2 charakterisieren, ausdrückt und dabei feststellt, daß es möglich ist, diejenigen Bestimmungsstücke zu vermeiden, die P_1, P_2 und Q_1, Q_2 genauer als durch $\overline{P_1P_2} = d_1$ bzw. $\overline{Q_1Q_2} = d_2$ auf g_1 bzw. g_2 festlegen. Beispielsweise gilt (Abb. L 261232 b): Ist φ die Größe eines (nicht überstumpfen) Winkels, den g_1 mit einer zu g_2 parallelen (und g_1 schneidenden) Geraden g_2' bildet, und ist h der Abstand, den g_2 von der zu g_2 parallelen und g_1 enthaltenden Ebene f hat, so ist

$$V = \frac{1}{6} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot h \cdot \sin\varphi .$$

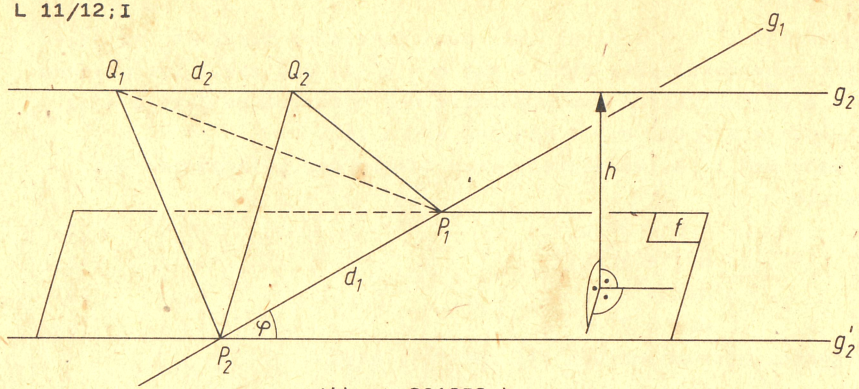

Abb. L 261232 b

261233 A) Lösung: 8 Punkte

Es gibt vier solche Zahlen. Zum Beweis dieser Aussage genügt es, die genannten Eigenschaften für ein Beispiel zu bestätigen. Ein solches Beispiel bilden etwa die Zahlen 242, 243, 244, 245; denn

$242 = 22+220$ ist wegen $242\cdot 20 = 22\cdot 220$ ein Teiler von $22\cdot 220$,
$243 = 81+162$ ist wegen $243\cdot 54 = 81\cdot 162$ ein Teiler von $81\cdot 162$,
$244 = 122+122$ ist wegen $244\cdot 61 = 122\cdot 122$ ein Teiler von $122\cdot 122$,
$245 = 35+210$ ist wegen $245\cdot 30 = 35\cdot 210$ ein Teiler von $35\cdot 210$.

Hinweis:

Da das Suchen eines solchen Beispiels durch bloßes Probieren (ohne zu wissen, ob überhaupt vier derartige Zahlen existieren) wenig sinnvoll ist, wird man nach wirksameren heuristischen Motiven vorgehen, z. B. folgendermaßen:

Eine natürliche Zahl n hat genau dann die genannte Eigenschaft, wenn ($n \geqq 2$ gilt und) n ein Teiler von einem der Produkte

$$k\cdot(n-k) \qquad (k = 1,\dots,n-1)$$

ist. Wegen $k\cdot(n-k) = kn - k^2$ ist das gleichbedeutend damit, daß n ein Teiler von einer der Quadratzahlen k^2 $(k = 1,\dots,n-1)$ ist. Hierfür ist hinreichend[1], daß die Zahl n ihrerseits durch eine

---

1 Es gilt sogar "äquivalent" statt "hinreichend". Wenn nämlich n quadratfrei ist, d. h. durch eine Quadratzahl $q^2 > 1$ teilbar, so hat n eine Primfaktorzerlegung $n = p_1\cdots p_m$ aus paarweise ver-
(Forts. s. S. 4)

Quadratzahl $q^2 > 1$ teilbar ist; denn wenn dies zutrifft, so existiert eine natürliche Zahl a mit $n = q^2 \cdot a$, und damit ist n wegen $n \cdot a = q^2 a^2$ ein Teiler des Quadrates der natürlichen Zahl $k = qa$, die wegen $k = \frac{n}{q}$ und $q > 1$ kleiner als n ist.
Nun kann man z. B. versuchen, vier Zahlen der geforderten Art etwa als

$$n = 2^2 \cdot a, \qquad (1)$$
$$n+1 = 3^2 \cdot b, \qquad (2)$$
$$n+2 = 5^2 \cdot c, \qquad (3)$$
$$n+3 = 7^2 \cdot d \qquad (4)$$

zu finden. Hiervon werden (1) und (2), also

$$4a + 1 = 9b$$

etwa gelöst durch $b = 1 + 4t$, $a = 2 + 9t$,

$$n = 8 + 36\,t; \qquad (5)$$

sodann werden (5) und (3), also

$$10 + 36t = 25c$$

etwa gelöst durch $t = -10 + 25u$, $c = -14 + 36u$,

$$n = -352 + 900\,u; \qquad (6)$$

schließlich werden (6) und (4), also

$$-349 + 900\,u = 49d$$

etwa gelöst durch $u = -16 + 49v$, $d = -301 + 900v$,

$$n = -14752 + 44100v,$$

für $v = 1$ also $n = 29348$.
Hat man die Lösungsfindung wie hier als Nachweis hinreichender Bedingungen formuliert, so ist eine Probe nicht erforderlich. Andernfalls ist es für die Korrektheit der Lösung (wie oben bemerkt, sogar allein) erforderlich, die verlangte Eigenschaft zu bestätigen:

$29348 = 4 \cdot 7337 = x+y$ ist Teiler von xy für $x = 2 \cdot 7337$, $y = 2 \cdot 7337$,
$29349 = 9 \cdot 3261 = x+y$ ist Teiler von xy für $x = 3 \cdot 3261$, $y = 6 \cdot 3261$,
$29350 = 25 \cdot 1174 = x+y$ ist Teiler von xy für $x = 5 \cdot 1174$, $y = 20 \cdot 1174$,
$29351 = 49 \cdot 599 = x+y$ ist Teiler von xy für $x = 7 \cdot 599$, $y = 42 \cdot 599$.

---

1 (Forts. v. S. 3)
schiedenen Primzahlen, und dann ist $n \mid k^2$, d.h. $n \cdot u = k^2$ nur möglich, wenn auch die Primfaktorzerlegung von u alle Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$ enthält, also nur mit $u \geqq n$ und folglich $k^2 \geqq n^2$, $k \geqq n$. (Dies wird für die obige Lösungsgewinnung nicht benötigt.)

<u>261233 B)Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Nach der Formel $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ und dem Kosinussatz gilt

$$\frac{1}{a} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2a}(1 + \cos \alpha) = \frac{1}{2a}(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}) = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{4abc}.$$

Entsprechend ist

$$\frac{1}{b} \cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{c^2 + a^2 - b^2 + 2ac}{4abc}, \quad \frac{1}{c} \cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{4abc}.$$

Bezeichnet T die linke Seite der Ungleichung (1), so gilt folglich

$$T = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{4abc},$$

mit der Abkürzung $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ also

$$T = \frac{s^2}{abc}.$$

Ferner ist[1] $F = \varrho \cdot s$, also

$$T = \frac{s^3}{abc} \quad \frac{\varrho}{F}. \qquad (2)$$

Nun gilt nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel[2]

$$\frac{1}{3}(a+b+c) \geqq \sqrt[3]{abc} \qquad (3)$$

und darin das Gleichheitszeichen genau im Fall $a = b = c$.

---

1 Als bekannter Sachverhalt zu zitieren oder z. B. durch Zerlegung von ABC in die Teildreiecke ABM, BCM, CAM (M Inkreismittelpunkt) zu beweisen.

2 Als bekannter Sachverhalt zu zitieren oder z. B. so zu beweisen: Es sei o.B.d.A. $a \leqq b \leqq c$, also $b = a+u$, $c = a+u+v$ mit $u, v \geqq 0$. Dann ist

$$(a+b+c)^3 - 27abc = (3a + 2u + v)^3 - 27a(a + u)(a + u + v)$$
$$= 9au^2 + 9auv + 9av^2 + 8u^3 + 12u^2v + 6uv^2 + v^3$$
$$\geqq 0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau im Fall $u = v = 0$.

Äquivalent zu (3) ist

$$s^3 \geqq \frac{27}{8} abc, \qquad (4)$$

und das Gleichheitszeichen in (3) ist äquivalent zu dem in (4). Damit folgt aus (2),(4)

$$T \geqq \frac{27}{8} \; \frac{\varrho}{F},$$

d. h. die zu beweisende Ungleichung (1), und es folgt, daß das Gleichheitszeichen in (1) genau im Fall $a = b = c$, d. h. genau für alle gleichseitigen Dreiecke gilt.

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

261234) Lösung: 6 Punkte

Mit $\alpha = \overline{\sphericalangle BAD}$ ist nach dem Satz über Gegenwinkel im Sehnenviereck $\overline{\sphericalangle BCD} = 180^\circ - \alpha$. Nach dem Kosinussatz und wegen $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ gilt daher

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\cos\alpha$$

und
$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cdot\cos\alpha,$$

also
$$2\cdot\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 - 2\cdot(\overline{AB}\cdot\overline{AD} - \overline{BC}\cdot\overline{CD})\cdot\cos\alpha. \qquad (2)$$

Wegen $\overline{\sphericalangle ANB} = \overline{\sphericalangle DNC}$, $\overline{\sphericalangle BNC} = \overline{\sphericalangle AND}$

(Scheitelwinkel) und

$$\overline{\sphericalangle ABN} = \overline{\sphericalangle DCN}, \quad \overline{\sphericalangle BCN} = \overline{\sphericalangle ADN}$$

(Peripheriewinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{AD}$ bzw. $\overset{\frown}{AB}$ des Kreises, dem das Sehnenviereck einbeschrieben ist) gilt

$$\triangle ABN \sim \triangle DCN \qquad (3)$$

und
$$\triangle BCN \sim \triangle ADN.$$

Aus (3) folgt $\overline{AB}:\overline{DC} = \overline{AN}:\overline{DN}$,

wegen der Voraussetzung $\overline{AN} = \overline{CN}$ also

$$\overline{AB}:\overline{CD} = \overline{CN}:\overline{DN}. \qquad (5)$$

Aus (4) folgt $\overline{BC}:\overline{AD} = \overline{CN}:\overline{DN}$. (6)

Wegen (5) und (6) ist

$$\overline{AB}:\overline{CD} = \overline{BC}:\overline{AD},$$

also
$$\overline{AB}\cdot\overline{AD} = \overline{BC}\cdot\overline{CD}.$$

Damit ergibt sich aus (2) die Behauptung (1).

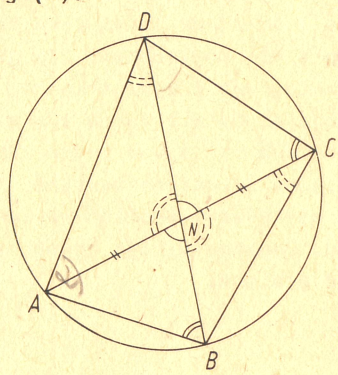

Abb. L 261234

Andere Fortsetzungsmöglichkeit nach (2)

Verlängert man die Strecke AB über B hinaus um ihre eigene Länge bis A', so gilt

$\overline{\sphericalangle CBA'} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle CBA}$ (Nebenwinkel)

$= \overline{\sphericalangle ADC}$ (Gegenwinkel im Sehnenviereck)

und BN ∥ A'C (Umkehrung des Strahlensatzes), also

$\overline{\sphericalangle BA'C} = \overline{\sphericalangle ABD}$ (Stufenwinkel)

$= \overline{\sphericalangle DCA}$ (Peripheriewinkel über AD).

Also ist $\triangle A'BC \sim \triangle CDA$ und daher

$\overline{A'B}:\overline{BC} = \overline{CD}:\overline{DA}$,

$\overline{AB}\cdot\overline{AD} = \overline{BC}\cdot\overline{CD}$.

womit (1) folgt.

261235)Lösung: 6 Punkte

Der Spieler A kann für jedes n und jedes k ($n > 3$, $1 < k < n-1$) zum Beispiel mit folgender Strategie den Gewinn erzwingen: Ist n ungerade, so schaltet A im 1. Zug genau die in der Mitte der Lampenreihe liegende (die $\frac{n+1}{2}$te) Lampe ein; ist n gerade, schaltet A im 1. Zug genau 2 Lampen in der Mitte ein, die $\frac{n}{2}$te und die $(\frac{n}{2} + 1)$te Lampe. Durch diesen 1. Zug von A wird die Lampenreihe in zwei symmetrische Teilbereiche I und II uneingeschalteter Lampen eingeteilt, die die gleiche Anzahl von Lampen enthalten. Diese Anzahl L ist von Null verschieden; denn da die Anzahl a der von A eingeschalteten Lampen höchstens 2 und n mindestens 4 ist, gilt: $L = \frac{1}{2}(n-a) \geqq \frac{1}{2}(4-2) > 0$. B kann dann in seinen folgenden Zügen, da in einem Zug nur nebeneinanderliegende Lampen eingeschaltet werden dürfen, jeweils nur entweder Lampen aus I oder aus II einschalten. Damit bleibt für A nach jedem Zug von B die Möglichkeit, im jeweils anderen Teilbereich als B den zum Zug von B symmetrischen Zug auszuführen. Diese Strategie verfolgt A. Da mit jedem Zug wenigstens eine Lampe eingeschaltet wird und für B vor jedem Zug in beiden Teilbereichen eine symmetrische Situation besteht, ist B gezwungen, in einem der Teilbereiche nach endlich vielen Zügen die letzte Lampe einzuschalten. Danach tut das im nächsten Zug auch A im anderen Teilbereich und gewinnt.

261236) Lösung: 8 Punkte

Aus (1) und (2) folgt durch vollständige Induktion $x_n > 0$ für alle $n = 1,2,3,\ldots$ und dann

$$9x_n^2 < x_{n+1}^2 < 9x_n^2 + 12x_n + 4 = (3x_n + 2)^2,$$

$$3x_n < x_{n+1} < 3x_n + 2. \qquad (4)$$

Das ergibt zunächst (durch vollständige Induktion)

$x_n > \frac{3^n}{2}$ für alle $n = 1,2,3,\ldots$ und dann

$$3 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < 3 + \frac{2}{x_n} < 3 + \frac{4}{3^n}.$$

Nach (3) folgt damit

$$\frac{3}{|a|} < \frac{|y_{n+1}|}{|y_n|} < \frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a| \cdot 3^n}. \qquad (5)$$

1. Ist nun $|a| < 3$ (und $a \neq 0$), so gilt für die Zahl $q = \frac{3}{|a|}$ einerseits $q > 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$; andererseits folgt aus (5)

$$|y_{n+1}| > q \cdot |y_n|,$$

$|y_{n+1}| > q^n \cdot |y_1|$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ (durch vollständige Induktion) und wegen $|y_1| > 0$ damit $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = +\infty$. Also ist die Folge (y_n) in diesem Fall divergent.

2. Ist $|a| > 3$, so existiert wegen

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a| \cdot 3^n}\right) = \frac{3}{|a|} < 1 \qquad (6)$$

eine Zahl q mit $\frac{3}{|a|} < q < 1$. Für diese Zahl gilt einerseits $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$; andererseits gibt es wegen (6) eine Zahl N so, daß für alle $n \geqq N$

$$\frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a| \cdot 3^n} < q,$$

nach (5) also

$$|y_{n+1}| < q \cdot |y_n|,$$

$|y_{N+k}| < q^k \cdot |y_N|$ $(k = 1,2,3,\ldots)$ (durch vollständige Induktion) ist. Daher gilt $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$; also ist die Folge (y_n) in diesem Fall konvergent.

3. Ist a = 3, so folgt aus (4) nach Division durch 3^{n+1}

$$y_n < y_{n+1} < y_n + \frac{2}{3^{n+1}}. \qquad (7)$$

Daraus folgt einerseits:

Die Folge (y_n) ist monoton steigend. (8)

Andererseits ergibt sich (durch vollständige Induktion) für alle n = 2,3,4,...

$$\begin{aligned} y_n &< y_{n-1} + \frac{2}{3^n} \\ &< y_{n-2} + \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &< y_1 + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}; \end{aligned}$$

wegen der Konvergenz der unendlichen Reihe $\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots$ gilt somit:

Die Folge (y_n) ist nach oben beschränkt. (9)

Aus (8) und (9) ergibt sich: Die Folge (y_n) ist konvergent.

4. Ist a = - 3, so gilt: Ist n gerade, so hat y_n denselben Wert wie für a = 3. Ist n ungerade, so hat y_n entgegengesetzt gleichen Wert wie für a = 3. Bezeichnet g den Grenzwert der für a = 3 gebildeten Folge (y_n), so hat also für a = -3 die Teilfolge der y_n mit geradem n den Grenzwert g und die Teilfolge der y_n mit ungeradem n den Grenzwert -g.

Nach (7) gilt $g \geqq y_1$, also $g > 0$ und damit $g \neq -g$.
Also ist die (gesamte) Folge (y_n) im Fall a = -3 divergent.

Damit ist gezeigt: Die Folge (y_n) ist genau für alle diejenigen a konvergent, für die

$$a < -3 \quad \text{oder} \quad a \geqq 3$$

gilt.