Unklarheit

A 11/12

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

261221

Man ermittle alle diejenigen Tripel reeller Zahlen (x;y;z), die Lösung des folgenden Gleichungssystems (1), (2), (3) sind:

$$x \cdot y = 2 \quad (1)$$
$$x \cdot z = 3 \quad (2)$$
$$x^2 + y^2 = 5. \quad (3)$$

261222

Man ermittle alle diejenigen Tripel (p,q,r) von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:

(1) In der Folge aller Primzahlen sind p,q,r in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende Primzahlen.
(2) Die Zahl $s = p^2 + q^2 + r^2$ ist eine Primzahl.

261223

In einer Stadt soll ein Wasserballturnier stattfinden, an dem zehn Mannschaften beteiligt sind. Jede Mannschaft spielt in einer Hin- und einer Rückrunde jeweils genau einmal gegen alle anderen. Zur Verfügung stehen zwei Schwimmhallen, die so weit voneinander entfernt sind, daß im Laufe eines Spieltages kein Übergang einer Mannschaft von einer Halle zur anderen erfolgen kann. Außerdem haben sich folgende Bedingungen als notwendig herausgestellt:

(1) An jedem Spieltag kann jede Mannschaft höchstens zwei Spiele bestreiten.
(2) In jeder Halle sind an jedem Spieltag höchstens fünf Mannschaften anwesend.

(3) Jede Mannschaft kann die Rückrunde erst beginnen, wenn sie alle Spiele der Hinrunde abgeschlossen hat.

Bei der Planung des Turniers wurde zunächst ein Spielplan aufgestellt, nach dem das Turnier in 10 Tagen durchgeführt werden kann.

Man untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch möglich ist, das Turnier in 9 Tagen durchzuführen.

<u>261224</u>

Zwei Kreise k_1, k_2 seien so gelegen, daß sie sich in zwei verschiedenen Punkten A, B schneiden und daß die Verbindungsstrecke M_1M_2 der beiden Kreismittelpunkte von der Strecke AB in einem Punkte geschnitten wird, der zwischen M_1 und M_2 liegt. Unter allen denjenigen Geraden, die durch A gehen und außerdem sowohl den Kreis k_1 in einem von A und B verschiedenen Punkt P als auch den Kreis k_2 in einem von A und B verschiedenen Punkt Q schneiden, wird nun eine Gerade gesucht, für die die Strecke PQ möglichst lang ist.

Man untersuche, ob es eine solche Gerade gibt, ob sie dann durch die Kreise k_1, k_2 eindeutig bestimmt ist und, wenn dies der Fall ist, welche Lage diese Gerade dann hat.

L 11/12

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

<u>Lösungen und Punktbewertung</u>

Olympiadeklassen 11/12

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

261229

<u>251221) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

<u>1. Lösungsweg:</u>

I. Wenn ein Tripel $(x;y;z)$ reeller Zahlen Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3) ist, so folgt:

Nach (1) ist $y \neq 0$, also folgt aus (1) $x = \frac{2}{y}$.

Setzt man dies in (3) ein, so ergibt sich $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$, also[1]

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0. \qquad (4)$$

Somit erfüllt die Zahl $u = x^2$ (5)

die Gleichung $u^2 - 5u + 4 = 0$. (6)

Aus (6) folgt: u ist eine der Zahlen $u_{1,2} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{25-16})$,

d. h. eine der Zahlen $u_1 = 4$, $u_2 = 1$.

Somit ist x nach (5) eine der Zahlen

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1. \qquad (7)$$

Nach (1) gehört hierzu als Wert für y jeweils die Zahl

$$y_1 = 1,\ y_2 = -1,\ y_3 = 2,\ y_4 = -2. \qquad (8)$$

und nach (2) als Wert für z jeweils

$$z_1 = \frac{3}{2},\ z_2 = -\frac{3}{2},\ z_3 = 3,\ z_4 = -3. \qquad (9)$$

Daher können nur die Tripel

$$(2;1;\tfrac{3}{2}),\ (-2;-1;-\tfrac{3}{2}),\ (1;2;3),\ (-1;-2;-3) \qquad (10)$$

das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen.

---

1 Man kann bei der Herleitung von (4) auch die Division durch y (und die hierfür nötige Feststellung $y \neq 0$) umgehen, indem man (3) mit x^2 multipliziert und dann $xy = 2$ aus (1) einsetzt.

II. Sie erfüllen es, wie aus

$$2\cdot 1 = (-2)(-1) = 1\cdot 2 = (-1)(-2) = 2,$$

$$2\cdot\frac{3}{2} = (-2)(-\frac{3}{2}) = 1\cdot 3 = (-1)(-3) = 3,$$

$$2^2+1^2 = (-2)^2 + (-1)^2 = 1^2 + 2^2 = (-1)^2 + (-2)^2 = 5$$

ersichtlich ist.

Also erfüllen genau die in (10) angegebenen Tripel das Gleichungssystem (1), (2), (3).

2. Lösungsweg:

Aus (1) und (3) folgt $x^2+2xy+y^2 = 5+2\cdot 2$ und $x^2-2xy+y^2 = 5-2\cdot 2$,

d. h. $(x+y)^2 = 9$ und $(x-y)^2 = 1$.

Daher erfüllen x und y eines der vier Gleichungssysteme (S_1) (S_2), (S_3), (S_4)

$$\left.\begin{array}{l} x+y = 3 \\ x-y = 1 \end{array}\right\} (S_1), \quad \left.\begin{array}{l} x+y = -3 \\ x-y = -1 \end{array}\right\} (S_2), \quad \left.\begin{array}{l} x+y = 3 \\ x-y = -1 \end{array}\right\} (S_3), \quad \left.\begin{array}{l} x+y = -3 \\ x-y = 1 \end{array}\right\} (S_4).$$

Diese führen auf die in (7), (8) ersichtlichen Paare; Fortsetzung wie oben.

3. Lösungsweg: Als Schnittpunkte der Graphen von $y = \frac{2}{x}$ und $x^2+y^2=5$ (bzw. beim Aufstellen von Wertetabellen zur Gewinnung dieser Graphen) erhält man die in (7), (8) ersichtlichen Paare. Ferner zeigt der Verlauf dieser Kurve (Abb. L 261221), daß keine weiteren Schnittpunkte existieren: Im I. Quadranten ist der Kreis $x^2+y^2 = 5$ von unten betrachtet konkav, die Hyperbel $y = \frac{2}{x}$ konvex; im III. Quadranten ist der Kreis von unten betrachtet konvex, die Hyperbel konkav.

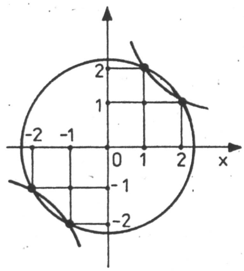

Abb. L 261221

261222) Lösung: 10 Punkte

I. Wenn (p,q,r) ein Tripel ist, das die Bedingungen (1), (2) erfüllt, so folgt (p,q,r) ist nicht das Tripel (2,3,5); denn dieses erfüllt wegen $2^2+3^2+5^2 = 38$ nicht die Bedingung (2). Ferner folgt: (p,q,r) ist kein Tripel mit $p > 3$ (also auch $q > 3$, $r > 3$); denn jede Primzahl, die größer als 3 ist, läßt bei Division durch 3 entweder den Rest 1 oder den Rest 2, ihr Quadrat läßt also in beiden Fällen den Rest 1; für jedes Tripel (p,q,r) von Primzahlen

$p,q,r > 3$ ist somit $p^2 + q^2 + r^2$ durch 3 teilbar (und größer als 3), also keine Primzahl.
Nach (1) verbleibt daher nur die Möglichkeit, daß (p,q,r) das Tripel (3,5,7) ist.

II. Dieses Tripel erfüllt als Tripel dreier aufeinanderfolgender Primzahlen die Bedingung (1), und wegen $3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ auch die Bedingung (2).

Mit I. und II. ist gezeigt, daß genau das Tripel (3,5,7) die Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

261223) Lösung: 11 Punkte

Jede Mannschaft hat gegen genau neun andere Mannschaften je genau zwei Spiele auszutragen, insgesamt also genau 18 Spiele. Wenn es möglich wäre, das Turnier in 9 Tagen durchzuführen, folgte aus (1), daß jede Mannschaft an jedem Spieltag genau zwei Spiele zu bestreiten hätte. Hiernach folgte aus (3), daß jede Mannschaft an den ersten vier Tagen acht ihrer Hinspiele, an den letzten vier Tagen acht ihrer Rückspiele und am mittleren, fünften Spieltag genau ein Hinspiel und ein Rückspiel auszutragen hätte.
Da jede Mannschaft an jedem Spieltag zu ihren beiden Spielen anwesend sein müßte, so müßten in jeder der beiden Schwimmhallen wegen (2) stets fünf Mannschaften zu ihren beiden Spielen anwesend sein; nach Voraussetzung bliebe an jedem Tag die Verteilung der Mannschaften auf die beiden Hallen unverändert. Das würde auch für den fünften Spieltag gelten. Von den fünf Mannschaften in einer Halle hätte an diesem Tag also jede genau ein Hinspiel (und genau ein Rückspiel) auszutragen. Da in jedem Spiel je zwei Mannschaften gegeneinander antreten, hätte man folglich die fünf Mannschaften für die Hinspiele so in Paare aufzuteilen, daß jede Mannschaft in genau einem dieser Paare vorkommt. Das ist wegen der ungeraden Anzahl 5 der Mannschaften nicht möglich.
Die Annahme, daß das Turnier in 9 Tagen durchführbar wäre, führt somit auf einen Widerspruch; das Turnier kann unter Einhaltung der genannten Bedingungen nicht in 9 Tagen durchgeführt werden.

261224) Lösung: 7 Punkte

Bei der vorausgesetzten Lage von k_1 und k_2 (siehe Abb. L 261224) schneidet die in A an k_2 gelegte Tangente den Kreis k_1 außer in A in einem Punkt T_1, und ebenso schneidet die in A an k_1 gelegte Tangente den Kreis k_2 außer in A in einem Punkt T_2. Die sämtlichen zu betrachtenden Lagen der Strecke PQ sind dann folgendermaßen zu erhalten:

(1) P durchläuft den ganz außerhalb k_2 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{T_1A}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte T_1, A). Dabei durchläuft Q den ganz außerhalb k_1 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{AT_2}$ von k_2 (mit Ausnahme seiner Endpunkte A, T_2). Abb. L 261224 zeigt zwei Beispiele: P_0Q_0 und P_1Q_1.

(2) P durchläuft den innerhalb k_2 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{AB}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte A, B). Dabei durchläuft Q den ganz außerhalb k_1 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{T_2B}$ von k_2 (mit Ausnahme seiner Endpunkte T_2, B). Abbildung L 261224 zeigt ein Beispiel: P_2Q_2.

(3) P durchläuft den ganz außerhalb k_2 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{BT_1}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte B, T_1). Dabei durchläuft Q den innerhalb k_1 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{BA}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte B, A).

Unter den zu betrachtenden Geraden durch A befindet sich diejenige, die senkrecht zu AB verläuft (oder, als gleichwertige Charakterisierung, parallel zu M_1M_2). Die von ihr erhaltene Strecke PQ hat die in Abbildung L 261224 gezeigte Lage P_0Q_0, die zu Fall (1) gehört.

Behauptung: Genau für diese Gerade ist die Strecke PQ möglichst lang.

Beweis: Es sei PQ irgendeine der zu betrachtenden Strecken, die verschieden von P_0Q_0 ist. Ist sie eine zu Fall (1) gehörende Strecke P_1Q_1, so folgt: Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt

$\overline{\sphericalangle BP_1A} = \overline{\sphericalangle BP_0A}$ und $\overline{\sphericalangle BQ_1A} = \overline{\sphericalangle BQ_0A}$, nach dem Hauptähnlichkeitssatz also $\triangle BP_1Q_1 \sim \triangle BP_0Q_0$.

Ist PQ eine zu Fall (2) gehörende Strecke P_2Q_2, so folgt: Nach dem Satz über Gegenwinkel im Sehnenviereck gilt $\overline{\sphericalangle BP_2A} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle BP_0A}$, also $\overline{\sphericalangle BP_2Q_2} = \overline{\sphericalangle BP_0A}$, nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\overline{\sphericalangle BQ_2A} = \overline{\sphericalangle BQ_0A}$, so daß ebenfalls $\triangle BP_2Q_2 \sim \triangle BP_0Q_0$ folgt.

Da Fall (3) durch Vertauschung von k_1, k_2 in Fall (2) übergeht, gilt in jedem Fall

$$\triangle BPQ \sim \triangle BP_0Q_0. \qquad (*)$$

Nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel folgt ferner aus $\overline{\sphericalangle BAP_0} = 90^0$, daß $\overline{\sphericalangle BM_1P_0} = 180^0$ gilt, d. h., daß die Sehne BP_0 ein Durchmesser von k_1 ist. (Ebenso ist BQ_0 ein Durchmesser von k_2; die Lage der als maximal behaupteten Strecke P_0Q_0 kann auch durch jede dieser beiden Aussagen charakterisiert werden.) Da aber jede von dem Durchmesser BP_0 verschiedene Sehne BP kürzer als der Durchmesser ist, d. h. $\overline{BP} < \overline{BP_0}$ gilt, folgt wegen (*) schließlich $\overline{PQ} < \overline{P_0Q_0}$, w.z.b.w.

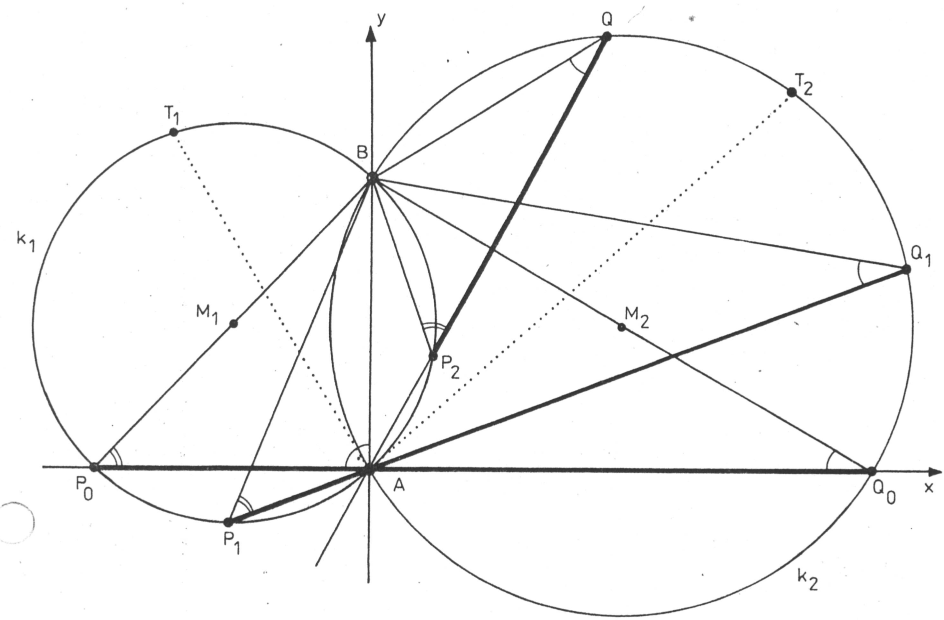

Abb. L 261224

Anderer Lösungsweg:

Man wähle ein Koordinatensystem z. B. so, daß A der Nullpunkt ist, daß die x-Achse parallel zu M_1M_2 verläuft und daß die positive y-Achse durch B geht. Bei geeigneter Reihenfolge der Bezeichnungen

M_1, M_2 gibt es dann nach Voraussetzung über k_1, k_2 drei positive Zahlen a,b,c so, daß M_1 die Koordinaten $(-a;c)$ und M_2 die Koordinaten $(b;c)$ hat. Hiernach ist k_1 die Menge aller derjenigen Punkte, deren Koordinaten $(x;y)$ die Gleichung $(x+a)^2+(y-c)^2=a^2+c^2$, d. h.

$$x^2 + 2ax + y^2 - 2cy = 0 \tag{4}$$

erfüllen, und k_2 ist die Menge aller derjenigen Punkte, deren Koordinaten $(x;y)$ die Gleichung $(x-b)^2+(y-c)^2 = b^2+c^2$, d. h.

$$x^2 - 2bx + y^2 - 2cy = 0 \tag{5}$$

erfüllen.

Jede Gerade, die laut Aufgabenstellung zu betrachten ist, ist eine von der y-Achse verschiedene Gerade durch den Nullpunkt A; sie ist also mit einem reellen m der Graph der Gleichung

$$y = mx. \tag{6}$$

Somit erfüllen die Koordinaten $(x_1;y_1)$ von P die Gleichungen (4) und (6), folglich gilt für sie

$$x_1^2 + 2ax_1 + m^2x_1^2 - 2cmx_1 = 0.$$

Ferner ist $x \neq 0$ (denn aus $x_1 = 0$ und (6) für $(x_1;y_1)$ folgte der Widerspruch $y_1 = 0$, also $P = A$); daher ergibt sich

$$x_1 + 2a + m^2x_1 - 2cm = 0$$

und hieraus wegen $1 + m^2 > 0$

$$x_1 = \frac{2cm - 2a}{1 + m^2}.$$

Entsprechend erfüllen die Koordinaten $(x_2;y_2)$ von Q die Gleichungen (5) und (6), und es folgt analog

$$x_2 = \frac{2cm + 2b}{1 + m^2}.$$

Daraus ergibt sich

$$\overline{PQ}^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 = (x_2-x_1)^2 + (mx_2-mx_1)^2$$

$$= (1+m^2)(x_2-x_1)^2 = (1+m^2)\left(\frac{2b+2a}{1+m^2}\right)^2 = \frac{4(a+b)^2}{1+m^2}.$$

Hieraus ist ersichtlich: Es gibt unter den zu betrachtenden Geraden genau eine Gerade, für die

$$PQ = \frac{2(a+b)}{\sqrt{1+m^2}} \qquad (7)$$

möglichst groß wird, nämlich die Gerade mit m = 0, d.i. die x-Achse.

Weitere Lösungsmöglichkeiten führen ohne Koordinatenverwendung, durch trigonometrische Herleitung, zu der (auch aus (7) zu entnehmenden) Formel $\overline{PQ} = \overline{P_0Q_0} \cdot \sin\varphi$, wobei φ den Winkel zwischen AB und PQ bezeichnet. Aus dieser Formel ist dann ersichtlich, daß $\overline{PQ}$ genau für $\varphi = 90^\circ$ maximal wird.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 11/12 Gesamtpunktzahl: 40

261221

Gleichung (4)	4 Punkte
Angabe der Zahlen in (7)	2 Punkte
Angabe aller Tripel in (10)	1 Punkt
Probe	1 Punkt
	8 Punkte

261222

Nachweis, daß $p \leqq 3$ ist	6 Punkte
(2,3,5) erfüllt nicht Bedingung (1), (2)	2 Punkte
II.	2 Punkte
	10 Punkte

261223

"Jede Mannschaft an jedem Tag genau zwei Spiele"	2 Punkte
Anschließende Folgerung aus (3)	2 Punkte
"In jeder Halle müssen fünf Mannschaften zu beiden Spielen anwesend sein"	3 Punkte
Folgerung, die auf einen Widerspruch führt	3 Punkte
Formulierung des Widerspruchs	1 Punkt
	11 Punkte

261224

Erfassen der Aufgabenstellung (Zeichnung)	2 Punkte
Vornehmen/Erkennen der Fallunterscheidung	2 Punkte
Nachweis der Ähnlichkeit der Dreiecke	
im Fall (1) (oder (3))	2 Punkte
im Fall (2)	2 Punkte
im Fall (3) (oder (1))	1 Punkt
"BP_0 und BQ_0 sind Durchmesser"	1 Punkt
Folgerung auf $\overline{PQ} < \overline{P_0Q_0}$	1 Punkt
	11 Punkte