Umlauft

A 10;I

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen.

261041

Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei x eine beliebig vorgegebene Streckenlänge. Die Seiten des Dreiecks ABC seien jeweils um eine Strecke dieser Länge x verlängert, und zwar BA über A hinaus bis A', CB über B hinaus bis B' und AC über C hinaus bis C'.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen das Dreieck A'B'C' stets denselben Umkreismittelpunkt wie das Dreieck ABC hat!

261042

Man ermittle die kleinste positive natürliche Zahl n, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:

(1) Es gibt genau 144 natürliche Zahlen, die Teiler von n sind.
(2) Unter den Teilern von n befinden sich 10 unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Von den nachstehenden Aufgaben 261043A und 261043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

261043A

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x_1, x_2, x_3) von reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen!

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \qquad (1)$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3, \qquad (2)$$
$$x_1 x_2 x_3 = 1. \qquad (3)$$

A 10;I

261043B

a) Beweisen Sie, daß fünf paarweise verschiedene reelle Zahlen existieren, mit denen die folgende Aussage gilt!

Für jede Auswahl von drei der fünf Zahlen existiert ein Dreieck, dessen Seitenlängen die drei ausgewählten Zahlen als Maßzahlen haben (wobei zum Messen aller drei Seitenlängen dieselbe Maßeinheit benutzt wird).

b) Ermitteln Sie, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, wie viele paarweise nicht kongruente Dreiecke insgesamt sich aus diesen fünf Zahlen auf die in a) genannte Art gewinnen lassen!

c) Beweisen Sie, daß stets dann, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, mindestens eines der genannten Dreiecke spitzwinklig ist!

Kurlandt

A 10;II

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

261044

Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ die Anzahl aller Lösungen (x,y,z,t) der Gleichung

$$\overline{xy} + \overline{zt} = \overline{yz},$$

worin für x, y, z, t nur natürliche Zahlen mit

$$1 \leq x \leq k-1,\ 1 \leq y \leq k-1,\ 1 \leq z \leq k-1,\ 0 \leq t \leq k-1$$

zugelassen sind!
Dabei bezeichnet jeweils $\overline{pq}$ diejenige Zahl, die im Positionssystem der Basis k mit den Ziffern p,q (in dieser Reihenfolge) geschrieben wird.

261045

Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0,1,...,6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0,1,...,6 je genau einmal vor.
Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen. Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen. Eine geschlossene Kette aus drei verschiedenen Steinen werde kurz "Dreierkette" genannt. Zwei Dreierketten gelten genau dann als gleich, wenn sie aus denselben Steinen bestehen.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen aus je genau 7 verschiedenen Dreierketten $K_1,\ldots,K_7$ bestehenden Mengen $\{K_1,\ldots,K_7\}$, bei denen jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer der Ketten $K_1,\ldots,K_7$ vorkommt!
(Wie üblich heißen zwei Mengen $M = \{K_1,\ldots,K_7\}$ und $M' = \{K_1',\ldots,K_7'\}$ genau dann einander gleich, wenn jede in der Menge M enthaltene Kette K_i auch in M' enthalten ist und umgekehrt auch jede in M' enthaltene Kette in M.)

A 10;II

261046

Beweisen Sie, daß es einen Körper mit den folgenden Eigenschaften (1) bis (4) gibt!

(1) Die Oberfläche des Körpers besteht aus genau sechs ebenen Vierecken.

(2) Unter diesen Vierecken gibt es zwei, die keine Seitenkante miteinander gemeinsam haben.

(3) Außer den Seitenkanten dieser beiden Vierecke hat der Körper noch genau vier weitere Seitenkanten.

(4) Die Mittelpunkte dieser vier Seitenkanten liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene.

Umlauf

L 10;I

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

261041) Lösung: 6 Punkte

Es sei M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC und somit Mittelpunkt des Umkreises dieses Dreiecks.
Sei r die Länge des Umkreisradius, dann gilt $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = r$.
Da das Dreieck ABC gleichseitig ist, ist jeder seiner Innenwinkel 60° groß. Da in einem solchen Dreieck der Umkreismittelpunkt gleichzeitig Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist, gilt
$\overline{\sphericalangle MBA} = 30^\circ$.
Ferner ist $\overline{\sphericalangle ABB'} = 120^\circ$ (als Nebenwinkel zum Winkel ABC), und deshalb gilt $\overline{\sphericalangle MBB'} = 150^\circ$.
Entsprechend läßt sich zeigen, daß auch die Winkel MCC' und MAA' 150° groß sind.
Demnach sind die Dreiecke MBB', MCC' und MAA' nach dem Kongruenzsatz sws kongruent zueinander; denn in jedem dieser Dreiecke schließen zwei Seiten von der Länge r bzw. x einen Winkel der Größe 150° ein.
Daraus folgt, daß die Strecken $\overline{MA'}$, $\overline{MB'}$ und $\overline{MC'}$ als entsprechende Seiten kongruenter Dreiecke gleich lang sind, d. h. M ist von den Punkten A', B' und C' gleich weit entfernt und somit Mittelpunkt des Umkreises auch des Dreiecks A'B'C'.

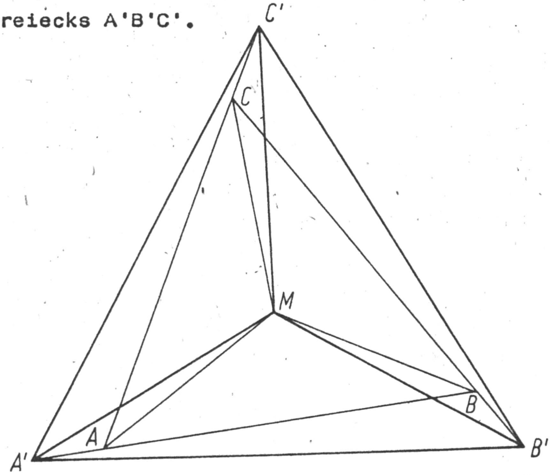

Abb. L 261041

L 10;I

Andere Lösungsdarstellung:

Wegen $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ und $\overline{\sphericalangle AMB} = \overline{\sphericalangle BMC} = \overline{\sphericalangle CMA}$ (Beweis wie oben) gilt: Durch eine Drehung um den Umkreismittelpunkt M des Dreiecks ABC kann A auf B, B auf C und C auf A abgebildet werden. Diese Drehung bildet die Verlängerung von BA über A hinaus auf die Verlängerung von CB über B hinaus ab und diese auf die Verlängerung von AC über C hinaus. Also bildet sie A' auf B' und B' auf C' ab; somit folgt $\overline{MA'} = \overline{MB'} = \overline{MC'}$.

261042) Lösung: 7 Punkte

I. Behauptung: (2) wird genau dann erfüllt, wenn die Primfaktorzerlegung von n

$$n = 2^{e_1} \cdot 3^{e_2} \cdot 5^{e_3} \cdot 7^{e_4} \cdot p_5^{e_5} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k} \qquad (3)$$

(mit Primzahlen $p_k > \ldots > p_5 > 7$, falls $k > 4$ ist, und) mit natürlichen Zahlen e_i, insbesondere

$$e_1 \geq 3,\ e_2 \geq 2,\ e_3 \geq 1,\ e_4 \geq 1, \qquad (4)$$

lautet.

Beweis: Wenn (2) erfüllt ist, so ist unter den zehn genannten Teilern

mindestens einer durch 8 teilbar,
mindestens einer durch 9 teilbar,
mindestens einer durch 5 teilbar,
mindestens einer durch 7 teilbar;

also gilt dann (3) mit (4).

Wenn umgekehrt (3), (4) gelten, so ist n durch jede der Zahlen 1,2,...,10 teilbar, also ist dann (2) erfüllt.

II. Alle natürlichen Teiler von n kann man folgendermaßen, jeden genau einmal, bilden:

Tritt in der Primfaktorzerlegung (3) der Faktor $p_i^{e_i}$ auf, so wähle man eine der Zahlen

$$1,\ p_i,\ p_i^2,\ \ldots,\ p_i^{e_i}. \qquad (5)$$

Das Produkt der so gewählten Zahlen $p_i^{d_i}$ $(i = 1,\ldots,k)$ ist einer der zu bildenden Teiler von n.

Da es für jeden Faktor $p_i^{e_i}$ also $e_i + 1$ Möglichkeiten (5) der Auswahl gibt, ist

$$(e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (e_k + 1)$$

die Anzahl aller Teiler von n (aus (3)).

III. Aus I. und II. folgt: Die gesuchte kleinste Zahl mit (1), (2) ist die kleinste Zahl (3), die außer (4) auch noch

$$(e_1 + 1) \cdot (e_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (e_k + 1) = 144 \qquad (6)$$

erfüllt.

Die folgende Tabelle enthält alle Möglichkeiten, (6) unter Berücksichtigung von (4), d. h. von

$$e_1 + 1 \geqq 4,\ e_2 + 1 \geqq 3,\ e_3 + 1 \geqq 2,\ e_4 + 1 \geqq 2, \qquad (7)$$

zu erfüllen.

Ferner ist in der Tabelle jeweils für

$$n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot q$$

die gemäß (3), (4) verbleibende Zahl

$$q = 2^{e_1-3} \cdot 3^{e_2-2} \cdot 5^{e_3-1} \cdot 7^{e_4-1} \cdot p_5^{e_5} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k} \qquad (8)$$

angegeben. Bei Aufstellung der Tabelle ergibt sich sogleich, daß (6), (7) nicht mit mehr als einem positiven Wert unter den $e_5, \ldots, e_k$ erfüllbar ist. Daher braucht (8) nur mit $k = 5$ genommen zu werden. Ferner gilt: n wird genau dann am kleinsten, wenn q am kleinsten wird; deshalb genügt es, in (8) (mit $k = 5$) nur die Primzahl $p_5 = 11$ zu berücksichtigen:

Zerlegung (6) mit (7)	e_1-3	e_2-2	e_3-1	e_4-1	e_5	q gemäß (8)
144 = 12•3•2•2•1	8	0	0	0	0	256
= 9•4•2•2•1	5	1	0	0	0	32• 3
= 8•3•3•2•1	4	0	1	0	0	16 • 5
= 8•3•2•3•1	4	0	0	1	0	16 • 7
= 6•6•2•2•1	2	3	0	0	0	4•27
= 6•4•3•2•1	2	1	1	0	0	4• 3• 5
= 6•4•2•3•1	2	1	0	1	0	4• 3 • 7
= 6•3•4•2•1	2	0	2	0	0	4 •25
= 6•3•2•4•1	2	0	0	2	0	4 •49
= 4•9•2•2•1	0	6	0	0	0	729
= 4•6•3•2•1	0	3	1	0	0	27• 5
= 4•6•2•3•1	0	3	0	1	0	27 • 7
= 4•4•3•3•1	0	1	1	1	0	3• 5• 7
= 4•3•6•2•1	0	0	4	0	0	625
= 4•3•4•3•1	0	0	2	1	0	25• 7
= 4•3•3•4•1	0	0	1	2	0	5•49
= 4•3•2•6•1	0	0	0	4	0	2401
= 6•3•2•2•2	2	0	0	0	1	$\boxed{4 \cdot 11}$
= 4•3•3•2•2	0	0	1	0	1	5 •11
= 4•3•2•3•2	0	0	0	1	1	7•11
= 4•3•2•2•3	0	0	0	0	2	121

Die Tabelle zeigt, daß q genau für

$$e_1 = 5,\ e_2 = 2,\ e_3 = e_4 = e_5 = 1$$

am kleinsten wird.

Die gesuchte kleinste Zahl mit (1), (2) ist demnach

$$n = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$
$$= 110880.$$

<u>261043A) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

<u>1. Lösungsweg:</u>

I. Wenn ein Tripel (x_1,x_2,x_3) reeller Zahlen das Gleichungssystem erfüllt, so folgt:

Setzt man aus (1)

$$x_3 = 3 - x_1 - x_2 \qquad (4)$$

in (2) ein, so ergibt sich

$$x_1^3 + x_2^3 + 27 - 27(x_1+x_2) + 9(x_1+x_2)^2 - x_1^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - x_2^3 = 3,$$

nach Division durch 3 also

$$9(x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2(x_1 + x_2) = 8; \qquad (5)$$

setzt man (4) in (3) ein, so folgt

$$3x_1x_2 - x_1x_2(x_1 + x_2) = 1. \qquad (6)$$

Für die beiden Zahlen

$$p = x_1x_2, \qquad (7)$$

$$s = x_1 + x_2 \qquad (8)$$

besagen (5) und (6) also

$$9s - 3s^2 + ps = 8, \qquad (9)$$

$$3p - ps = 1. \qquad (10)$$

Nach Addition und anschließender Division durch 3 folgt

$$3s - s^2 + p = 3,$$

und setzt man hieraus

$$p = s^2 - 3s + 3 \qquad (11)$$

in (9) ein, so ergibt sich

$$9s - 3s^2 + s^3 - 3s^2 + 3s = 8,$$

$$(s - 2)^3 = 0,$$

$$s = 2.$$

Nach (11), (7), (8) folgt hieraus

$$p = 1, \qquad (12)$$

$$x_1x_2 = 1,$$

$$x_1 + x_2 = 2. \qquad (13)$$

Setzt man $x_2 = 2 - x_1$ aus (13) in (12) ein, so folgt

$$2x_1 - x_1^2 = 1,$$

$$x_1 = 1$$

und damit aus (13) und (4)

$$x_2 = 1,$$

$$x_3 = 1.$$

Also kann nur das Tripel (1,1,1) das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen.

II. Es erfüllt offensichtlich dieses Gleichungssystem.
Somit hat genau das Tripel (1,1,1) diese geforderte Eigenschaft.

2. Lösungsweg:

Aus (1) folgt $(x_1 + x_2 + x_3)^3 = 27$, d. h.
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + 3(x_1x_2(x_1+x_2) + x_1x_3(x_1+x_3) + x_2x_3(x_2+x_3)) = 27$.

Setzt man hierin (2) und (3) ein und dividiert durch 3, so folgt

$$x_1x_2(x_1+x_2) + x_1x_3(x_1+x_3) + x_2x_3(x_2+x_3) = 6. \qquad (14)$$

Weiterhin gilt: Jedes Tripel (x_1,x_2,x_3), in dem die Zahl 0 vorkommt, ist nicht Lösung des Gleichungssystem, da es (3) nicht erfüllt. Jedes Tripel (x_1,x_2,x_3), in dem alle Zahlen von 0 verschieden sind und mindestens eine negative Zahl vorkommt, ist ebenfalls nicht Lösung des Gleichungssystems, wie man folgendermaßen zeigen kann: Wäre ein solches Tripel Lösung, wo wären wegen (3) genau zwei der Zahlen negativ, o.B.d.A. etwa $x_1 = -u$, $x_2 = -v$, $x_3 = w$ mit positiven u, v, w, und nach (1) wäre die linke Seite von (14) die Zahl

$$uv(-u-v) - uw(3+v) - vw(3+u) < 0$$

im Widerspruch gegen (14).
Schließlich gilt: Für jedes Tripel (x_1,x_2,x_3), in dem alle Zahlen positiv sind, ist nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

$$\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3},$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur im Fall $x_1 = x_2 = x_3$. Daher können nur in diesem Fall die beiden Gleichungen (1) und (3) erfüllt sein, und hiermit folgt aus (1) : $3x_1 = 3$, also $x_1 = 1$.
Somit kann insgesamt nur das Tripel (1,1,1) das Gleichungssystem erfüllen; die Probe zeigt, daß es dies tut.

261043B) Lösung: 7 Punkte

a) Zum Beweis genügt die Angabe eines Beispiels von fünf Zahlen und der Nachweis, daß die genannte Aussage mit den Zahlen dieses Beispiels gilt. Ein solches Beispiel bilden etwa die Zahlen 5,6, 7,8,9; die Aussage für sie kann folgendermaßen bewiesen werden: Für jede Auswahl von drei Zahlen a,b,c aus den fünf genannten Zahlen und für jede Reihenfolge der Bezeichnungen a,b,c dieser drei Zahlen gilt $a \geq 5$, $b \geq 5$ und $c \leq 9$, also $a+b \geq 10 > c$; somit erfüllen die drei Zahlen alle drei für sie formulierbaren Dreiecksungleichungen, folglich existiert ein Dreieck, dessen Seitenlängen die Maßzahlen a,b,c haben.

b) Liegen fünf Zahlen $z_1,\dots,z_5$ mit der in a) genannten Eigenschaft vor, so kann man insgesamt ebenso viele paarweise nicht kongruente Dreiecke auf die in a) genannte Art erhalten, wie es Mengen aus je drei der fünf Zahlen gibt (denn für je zwei verschiedene dieser Mengen gilt infolge der paarweisen Verschiedenheit von $z_1,\dots,z_5$: Jedes der beiden erhaltenen Dreiecke hat mindestens eine Seitenlänge, die in dem anderen Dreieck nicht vorkommt; also sind die beiden Dreiecke einander nicht kongruent).

Für die Anzahl dieser Mengen kann entweder als bekannter Sachverhalt der Wert $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$ zitiert werden, oder dieses Ergebnis kann z. B. folgendermaßen erhalten werden: Es gibt ebenso viele der gesuchten Mengen, wie es Möglichkeiten gibt, zwei der fünf Zahlen nicht als Elemente einer solchen Menge auszuwählen. Wenn z_1 eine dieser Zahlen ist, gibt es für die andere genau die vier Möglichkeiten z_2,z_3,z_4,z_5; wenn z_1 nicht, aber z_2 eine dieser Zahlen ist, gibt es für die andere genau die drei Möglichkeiten z_3,z_4,z_5; ... usw. Somit ist die gesuchte Anzahl $4+3+2+1 = 10$.

c) Für jedes Dreieck mit Seitenlängen

$$a < b < c$$

gilt: Wenn das Dreieck nicht spitzwinklig ist, so hat der Winkel, der der Seite der Länge c gegenüberliegt, eine Größe

$$\gamma \geq 90^\circ.$$

Nach dem Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ folgt daraus

$$c^2 \geq a^2 + b^2.$$

L 10;I

Wäre nun keines der in b) genannten Dreiecke spitzwinklig, so müßte, wenn man o.B.d.A.

$$z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5$$

voraussetzt, auch gelten:

$$z_3^2 \geqq z_1^2 + z_2^2 > 2z_1^2, \quad z_4^2 \geqq z_2^2 + z_3^2 > 2z_2^2,$$

$$z_5^2 \geqq z_3^2 + z_4^2 > 2(z_1^2 + z_2^2) = (z_1+z_2)^2 + (z_1-z_2)^2 > (z_1+z_2)^2,$$

also $z_5 > z_1 + z_2$ im Widerspruch zur Dreiecksungleichung. Damit ist die Annahme, daß keines der genannten Dreiecke spitzwinklig wäre, widerlegt.

Umlauft

L 10;II

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

261044) Lösung: 6 Punkte

I. Wenn k,x,y,z,t natürliche Zahlen sind, für die $k \geqq 2$ sowie $1 \leqq x,y,z \leqq k-1$ und $0 \leqq t \leqq k-1$ sowie die geforderte Gleichung, d. h.

$$k \cdot x + y + k \cdot z + t = k \cdot y + z \qquad (1)$$

gilt, so folgt: Es gilt

$$k \cdot x + t = (k-1) \cdot (y - z), \qquad (2)$$

wegen $x \geqq 1$ und $t \geqq 0$ also

$$y - z \geq \frac{k \cdot 1 + 0}{k-1} > 1$$

und daher

$$y - 1 > z. \qquad (3)$$

Wegen $z \geqq 1$ gilt folglich

$$y > 2 \qquad (4)$$

und wegen $k-1 \geqq y$ demnach

$$k > 3.$$

Gemäß (4) ist also

$$y \text{ eine der Zahlen } 3,4,\ldots,k-1, \qquad (5)$$

gemäß (3) ist

$$z \text{ eine der Zahlen } 1,2,\ldots,y-2. \qquad (6)$$

II. Umgekehrt folgt, wenn $k > 3$ ist und (5), (6) sowie (2) gelten: y und z erfüllen erst recht die Bedingungen $1 \leqq y,z \leqq k-1$; daher gilt einerseits

$$(k-1) \cdot (y-z) < (k-1) \cdot (k-0) < k^2.$$

Andererseits gilt wegen (6), also (3), auch

$$(k-1) \cdot (y-z) > k-1;$$

also ist $(k-1) \cdot (y-z)$ eine im Positionssystem der Basis k zweistellige Zahl. Durch (2) sind folglich zu y,z jeweils natürliche Zahlen x,t mit $1 \leqq x \leqq k-1$, $0 \leqq t \leqq k-1$ eindeutig bestimmt, und für diese y,z,x,t ist mit (2) auch die geforderte Gleichung (1) erfüllt.

III. Nach I. und II. ergibt sich: Für $k = 2$ und für $k = 3$ ist die gesuchte Lösungsanzahl 0; im Fall $k \geqq 4$ ist die gesuchte Lösungsanzahl gleich der Anzahl aller derjenigen Paare (y,z), die gemäß (5) und (6) zu bilden sind. Dabei durchläuft z jeweils

$$\begin{array}{ll} \text{für } y = 3 & \text{den Wert } z = 1, \\ \text{für } y = 4 & \text{die Werte } z = 1,2, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \text{für } y = k-1 & \text{die Werte } z = 1,2,\ldots,k-3; \end{array} \qquad (9)$$

die gesuchte Anzahl beträgt somit

$$1 + 2 + \ldots + (k-3)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (k-3) \cdot (k-2).$$

Bemerkung: Die erhaltene Formel bleibt auch für $k = 2$ und $k = 3$ richtig; die hier für $k \geqq 4$ formulierte Herleitung kann bei entsprechendem Kommentar auch als Herleitung im Fall $k \geqq 3$ verstanden werden, nämlich wenn vereinbart wird, daß die in (5) und (9) auftretende Aufzählung $3,4,\ldots,k-1$ im Fall $k \geqq 3$ eine y-Werte-Anzahl bzw. Zeilen-Anzahl 0 bedeuten soll.

261045) Lösung: 6 Punkte

In jeder Dreierkette $(a,b),(b,c),(c,a)$ sind a,b,c drei paarweise verschiedene Zahlen; denn wäre $a = b$, so wären (b,c) und (c,a) zwei gleiche Steine; entsprechend widerlegt man $a = c$ und $b = c$. Umgekehrt gibt es zu je drei paarweise verschiedenen Zahlen a,b,c genau eine Dreierkette, die diese Zahlen enthält. Weiter gilt:

I. Wenn $M = \{K_1,\ldots,K_7\}$ eine Menge mit den in der Aufgabe beschriebenen Eigenschaften ist, so folgt:
Da in den Dreierketten $K_1,\ldots,K_7$ kein Stein mehrmals auftritt, enthalten sie 21 Steine. Da das Dominospiel aber nur 21 Steine (a,b) mit $a \neq b$ enthält[1], kommt jeder dieser Steine in (genau) einer der Ketten $K_1,\ldots,K_7$ vor.
Also enthält eine dieser Ketten, o.B.d.A. die Kette K_1, den Stein $(0,1)$.

---

1 Die bis zu dieser Stelle des Lösungstextes verwendeten Aussagen können auch als bekannter Sachverhalt aus 261032 zitiert werden.

Man kann daher eine eventuelle Umbenennung der Zahlen 2,3,4,5,6 so vornehmen, daß

diejenige dieser fünf Zahlen die neue Benennung 2 (1)

erhält, mit der

$$K_1 = (0,1),(1,2),(2,0) \tag{2}$$

ist.
Weiter enthält nun eine der Ketten $K_2,\ldots,K_7$, o.B.d.A. die Kette K_2, den Stein (0,3). Da K_2 außerdem keinen der in (2) genannten Steine enthält, folgt somit: In K_2 kommt außer 0 und 3 als dritte Zahl weder 1 noch 2 vor. Man kann daher eine Umbenennung der Zahlen 4,5,6 so vornehmen, daß

diejenige dieser drei Zahlen die neue Benennung 4 (3)

erhält, mit der

$$K_2 = (0,3),(3,4),(4,0) \tag{4}$$

ist. Danach folgt:
O.B.d.A. enthält K_3 den Stein (0,5) und außerdem keinen der Steine in (2),(4), also außer 0, 5 keine der Zahlen 1,2,3,4. Somit ist

$$K_3 = (0,5),(5,6),(6,0). \tag{5}$$

O.B.d.A. enthält K_4 den Stein (1,3) und außerdem keinen der Steine in (2),(4). Also kann man eine Umbenennung der Zahlen 5,6 so vornehmen, daß

diejenige dieser zwei Zahlen die neue Benennung 5 (6)

erhält, mit der

$$K_4 = (1,3),(3,5),(5,1) \tag{7}$$

ist.
O.B.d.A. enthält K_5 den Stein (1,4) und außerdem keinen der Steine in (2),(4),(7). Somit ist

$$K_5 = (1,4),(4,6),(6,1). \tag{8}$$

O.B.d.A. enthält K_6 den Stein (2,3) und außerdem keinen der Steine in (4),(7). Somit ist

$$K_6 = (2,3),(3,6),(6,2), \tag{9}$$

und für K_7 verbleibt nur

$$K_7 = (2,4),(4,5),(5,2).$$

Also können nur solche Mengen $M = \{K_1,\dots,K_7\}$ die in der Aufgabe genannten Eigenschaften haben, die nach Ausführung von Umbenennungen gemäß (1),(3),(6) die in (2),(4),(5),(7),(8),(9),(10) genannten Ketten enthalten.

II. Jede solche Menge hat diese Eigenschaften, da eine Umbenennung gemäß (3) die Kette (2) nicht ändert und ebenso eine Umbenennung gemäß (6) keine der Ketten (2),(4),(5) ändert, so daß die an M gestellten Forderungen der Aufgabe sich - nach diesen Umbenennungen - aus den Angaben (2),(4),(5),(7),(8),(9),(10) bestätigen lassen.

III. Mit I. und II. ist bewiesen, daß genau elle diejenigen Mengen $M = \{K_1,\dots,K_7\}$, die gemäß (1) - (10) zu erhalten sind, die in der Aufgabe geforderten Eigenschaften haben. Ferner folgt: Je zwei solche Mengen M, M', bei deren Gewinnung gemäß (1) bis (10) zwei unterschiedliche Wahlen in (1) getroffen wurden, sind voneinander verschieden, da diejenige Kette, die nach der zu M führenden Wahl (1) die in (2) genannte Kette K_1 ist, nicht in M' vorkommt. Ebenso folgt: Je zwei Mengen M, M', bei deren Gewinnung zwar dieselbe Wahl in (1), aber unterschiedliche Wahlen in (3) getroffen wurden, sind voneinander verschieden, da die in M gemäß (4) enthaltene Kette K_2 nicht in M' vorkommt. Entsprechend sind auch je zwei Mengen voneinander verschieden, bei deren Gewinnung zwar in (1) sowie in (3) jeweils gleichlautende Wahlen, aber in (6) unterschiedliche Wahlen getroffen wurden.

Somit ergibt sich insgesamt: Man erhält bei allen und nur den $5\cdot3\cdot2$ Möglichkeiten, die Wahlen in (1),(3),(6) zu treffen, Mengen mit den in der Aufgabe geforderten Eigenschaften, jede dieser Mengen genau einmal.
Also beträgt die gesuchte Anzahl dieser Mengen

$$5\cdot3\cdot2 = 30.$$

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Vom Schüler wird nicht eine Beweisformulierung von gleicher Detailliertheit wie im vorliegenden Lösungstext verlangt. Jedoch ist, auch bei anderweitiger Lösungsdarstellung, zu bewerten, ob aus der Darstellung eine Herleitung und Bestätigung (I., II.) der Struktur der gesuchten Mengen sowie ihrer Verschiedenheit (III.) hervorgeht.

261046) Lösung: 8 Punkte

Es genügt, einen Körper K zu beschreiben und aus seiner Beschreibung herzuleiten, daß er die Eigenschaften (1) bis (4) hat. Ein Beispiel hierfür ist das folgende: K sei der Restkörper, der verbleibt, wenn man von einer Pyramide P = ABCDS vermittels einer geeigneten Schnittebene s eine Pyramide EFGHS abschneidet. Dabei seien P und s gegeben durch ihre Darstellung in Zweitafelprojektion (Abb. L 261046), wobei die Aufrißebene und die (noch nicht in die Zeichenebene heruntergeklappte) Grundrißebene zugleich die y,z-Ebene bzw. die x,y-Ebene eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems seien. In diesem Koordinatensystem sei

$$A=(8,4,0),\ B=(14,8,0),\ C=(8,20,0),\ D=(2,8,0),\ S=(8,-4,12).$$

Als Schnittebene s sei die x,z-Ebene gewählt. Für ihre Schnittpunkte E,F,G,H mit den Kanten AS, BS, CS, DS erhält man[1]

$$E=(8,0,6),\ F=(10,0,8),\ G=(8,0,10),\ H=(6,0,8).$$

Für den so definierten Restkörper K gilt in der Tat, wie gefordert:

(1) Die Oberfläche von K besteht genau aus den sechs ebenen Vierecken ABCD (Grundfläche von P in der x,y-Ebene), EFGH (Schnittfläche von **P** mit der Ebene s), ABFE, BCGF, CDHG, DAEH (Teilflächen der Seitenflächen ABS, BCS, CDS, DAS von P).

(2) Die Vierecke ABCD und EFGH haben die Seitenkanten AB,BC,CD,DA bzw. EF,FG,GH,HE, also keine gemeinsame Seitenkante.

(3) Außer diesen hat der Körper K noch genau die 4 Seitenkanten AE, BF, CG, DH.

(4) Deren Mittelpunkte sind[1]

$$M = (8,2,3),\ N = (12,4,4),\ U = (8,10,5),\ V = (4,4,4).$$

Daß diese vier Punkte nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen, kann man z. B. folgendermaßen nachweisen:

1 Diese Koordinaten lassen sich mit Hilfe des Strahlensatzes jeweils aus Koordinaten ermitteln, die der Zeichnung entnommen werden können, oder aber rein rechnerisch (mit Formeln der analytischen Geometrie aus den Koordinaten von A,B,C,D,S) gewinnen.

L 10;II

Wegen der Gleichheit der Aufrisse N" = V" steht die durch M,N,V gelegte Ebene e senkrecht zur Aufrißebene; bei senkrechter Projektion von e auf die Aufrißebene ergibt sich also eine Gerade e"; sie geht durch M", N". Diese Gerade e" in der y,z-Ebene hat den Anstieg (4 - 3) : (4 - 2) = $\frac{1}{2}$. Dagegen hat die Gerade durch N", U" den Anstieg (5 - 4) : (10 - 4) = $\frac{1}{6}$. Also liegt U" nicht auf e"; folglich kann auch U nicht auf e liegen.

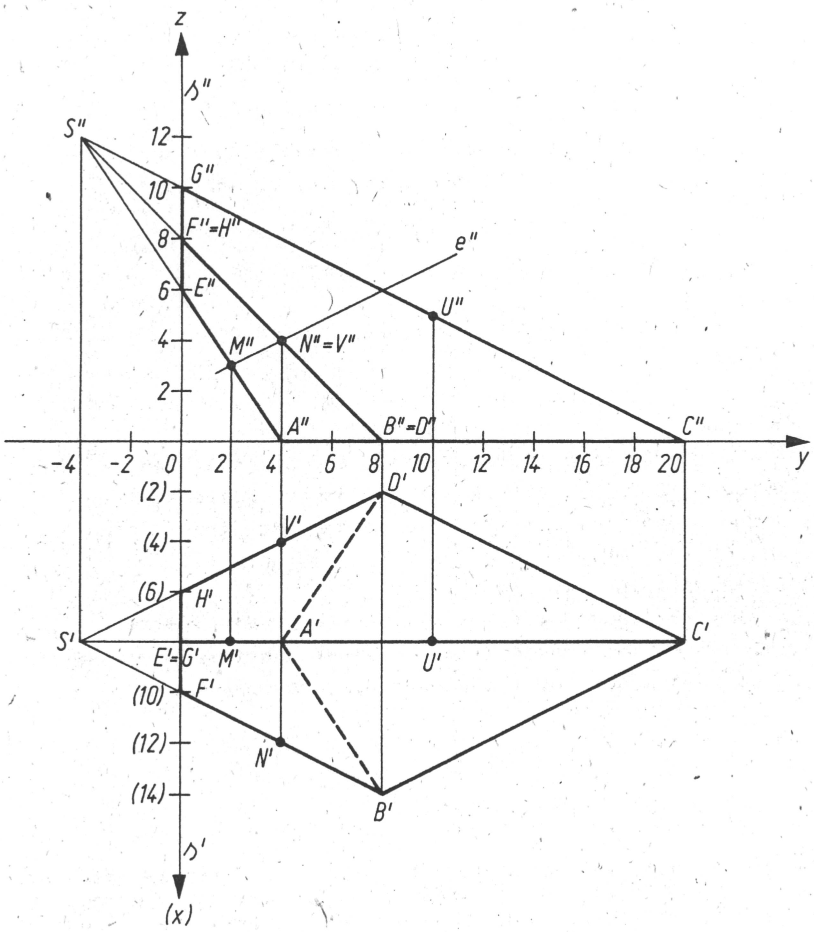

Abb. L 261046