A 10;I

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

261031

Von einer natürlichen Zahl x sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:

(1) Im Zweiersystem geschrieben hat x genau sieben Stellen.

(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so tritt keine Ziffer mehr als zweimal auf.

(3) Im Fünfersystem geschrieben hat x genau vier Stellen.

Beweisen Sie, daß es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und geben Sie diese Zahl an!

261032

Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0,1,...,6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0,1,...,6 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steins dieselbe Zahl steht). Insgesamt besteht hiernach ein Dominospiel aus genau 28 Steinen.
Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel). Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen.

(a) Ermitteln Sie die kleinste Anzahl $k > 1$ von verschiedenen Steinen eines Dominospiels, die eine geschlossene Kette bilden können!

(b) Aus einem Dominospiel sollen geschlossene Ketten aus je k verschiedenen Steinen gebildet werden (k sei die in (a) genannte Zahl). Dabei soll jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer dieser Ketten verwendet werden.
Ermitteln Sie die größte Anzahl g von Ketten, die so zustandekommen können!

(c) Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen geschlossenen Ketten aus je k verschiedenen Steinen, die sich überhaupt bilden lassen! (Es darf also jeder Stein des Dominospiels in beliebig vielen dieser Ketten auftreten.) Dabei gelten zwei geschlossene Ketten genau dann als gleich, wenn sie bei geeigneter Wahl eines Anfangssteins und einer Durchlaufungsrichtung gleichlautende Zahlenfolgen zeigen. Beispielsweise gelten die beiden Ketten

$$(2,4),(4,5),(5,5),(5,1),(1,2)$$

und $$(5,4),(4,2),(2,1),(1,5),(5,5)$$

als einander gleich.

<u>261033</u>

Über eine Gerade h und drei Punkte S,A,B auf h wird vorausgesetzt, daß A zwischen S und B liegt. Ferner wird über eine Gerade $g \not\parallel h$ vorausgesetzt, daß sie h in S schneidet. Gesucht sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen (a) und (b) erfüllen:

(a) Der Punkt P liegt auf g.

(b) Der Innenwinkel $\sphericalangle$ SBP im Dreieck SBP hat dieselbe Größe wie einer der Winkel, den AP mit g bildet.

(I) Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn ein Punkt P die Bedingungen (a),(b) erfüllt, dann kann er (aus voraussetzungsgemäß gegebenen h,g,S,A,B) durch eine Konstruktion erhalten werden.

(II) Beschreiben Sie eine Konstruktion, für die die Aussage in (I) zutrifft!

(III) Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn ein Punkt P nach der Beschreibung (II) konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen (a),(b).

A 10;II

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>261034</u>

Ermitteln Sie unter allen denjenigen Werten, die

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 22 \qquad (1)$$

für ganzzahlige x und y annehmen kann, den kleinsten Wert z, der eine natürliche Zahl ist!

Geben Sie alle diejenigen Paare (x;y) ganzer Zahlen an, bei denen sich in (1) dieser Wert z ergibt!

<u>261035</u>

Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 5$ ist, so gilt: Wird eine Kugel von n Ebenen geschnitten, so entstehen auf der Kugeloberfläche höchstens 22 Teilflächen.

<u>261036</u>

Beweisen Sie, daß für jede reelle Zahl $x > 1$ die Ungleichungen

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$$

gelten!

30 10 08-1

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

<u>Lösungen und Punktbewertung</u>

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung</u>: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

<u>261031)Lösung</u>: <u>6 Punkte</u>

I. Wenn eine natürliche Zahl x die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:

Wegen (1) gilt $x < 2^7$, d. h.

$$x < 128.$$

Wegen (3) gilt $5^3 \geqq x$, d. h.

$$125 \geqq x.$$

Daher ist x eine der Zahlen 125, 126, 127.

Die Zahl $125 = 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2$ erfüllt nicht die Bedingung (2), da bei ihrer Darstellung im Dreiersystem die Ziffer 1 dreimal auftritt.

Die Zahl $127 = 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 1$ erfüllt ebenfalls nicht (2), da auch bei ihrer Darstellung die Ziffer 1 dreimal auftritt.

Also kann nur die Zahl x = 126 die geforderten Bedingungen erfüllen.

II. Sie erfüllt diese Bedingungen, wie aus

$$\begin{aligned} 126 &= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 \\ &= 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 0 \\ &= 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 1 \end{aligned}$$

ersichtlich ist.

Somit erfüllt genau die Zahl x = 126 die Bedingungen der Aufgabe.

<u>261032)Lösung</u>: <u>6 Punkte</u>

(a) Aus zwei verschiedenen Steinen eines Dominospiels kann man keine geschlossene Kette bilden; denn in jeder geschlossenen Kette (a,b),(b,a) aus zwei Steinen sind diese einander gleich.

Aus drei verschiedenen Steinen eines Dominospiels kann man eine geschlossene Kette bilden, z. B. (0,1),(1,2),(2,0).

Also ist die in (a) gesuchte kleinste Anzahl k = 3.

(b) In jeder geschlossenen Kette (a,b),(b,c),(c,a) aus 3 verschiedenen Steinen eines Dominospiels sind a, b und c drei paarweise verschiedene Zahlen; denn wäre a = b, so wären (b,c) und (c,a) zwei gleiche Steine; entsprechend widerlegt man a = c und b = c.

Die Anzahl aller derjenigen Steine eines Dominospiels, die ein Paar verschiedener Zahlen tragen, ist 28 - 7 = 21. Wegen 21:3 = 7 lassen sich daher höchstens 7 Ketten in der geforderten Art bilden.

Daß sich 7 Ketten in dieser Art bilden lassen, zeigt das Beispiel

(0,1),(1,2),(2,0); (0,3),(3,4),(4,0); (0,5),(5,6),(6,0);
(1,3),(3,5),(5,1); (1,4),(4,6),(6,1);
(2,3),(3,6),(6,2); (2,4),(4,5),(5,2).

Also ist die in (b) gesuchte Anzahl g = 7.

(c) Wie in (b) gezeigt wurde, enthält jede geschlossene Kette aus drei verschiedenen Steinen eines Dominospiels drei paarweise verschiedene Zahlen. Umgekehrt gibt es zu je drei paarweise verschiedenen Zahlen a,b,c genau drei Steine mit je einem Paar verschiedener dieser Zahlen, und es gibt (nach der Erklärung, welche geschlossenen Ketten als gleich zu gelten haben) genau eine geschlossene Kette aus diesen drei Steinen, nämlich die Kette (a,b), (b,c),(c,a). Also gibt es genauso viele geschlossene Ketten aus je drei verschiedenen Steinen eines Dominospiels, wie es Mengen aus je drei paarweise verschiedenen der Zahlen 0,1,...,6 gibt.

Um diese Mengen zu bilden, kann man zuerst eine der sieben Zahlen 0,1,...,6 beliebig wählen, dann jeweils eine der sechs soeben nicht gewählten Zahlen und schließlich eine der fünf zuvor noch nicht gewählten Zahlen. Mit jeder dieser 7·6·5 Wahlmöglichkeiten hat man eine der genannten Mengen erfaßt, und zwar jede solche Menge mit genau sechs Wahlmöglichkeiten, nämlich denjenigen, bei denen die drei Zahlen der Menge in jeweils einer ihrer sechs möglichen Reihenfolgen gewählt wurden.

Also beträgt die Anzahl dieser Mengen und damit die gesuchte Anzahl von Ketten

$$\frac{7\cdot 6\cdot 5}{6} = 35.$$

<u>Hinweis:</u> Einige der geforderten Ermittlungen können durch (z. B. tabellarische) Angabe und Abzählung von Fällen erfolgen. So kann

man etwa die in (c) gesuchte Anzahl als

$$(5+4+3+2+1) + (4+3+2+1) + (3+2+1) + (2+1) + 1 = 35$$

erhalten. Bei der Korrektur derartiger Lösungsformulierungen ist zu berücksichtigen, ob aus der Darstellung hervorgeht, daß eine Aufzählung jeden geforderten Fall genau einmal erfaßt.

<u>261033)Lösung</u>: <u>8 Punkte</u>

(I) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (a),(b) erfüllt (Abb. L 261033 a), so folgt: Ist

β die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle SBP$ im Dreieck SBP,

β' die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle SPA$ im Dreieck SPA

sowie

φ die Größe des gemeinsamen Innenwinkels

$$\overline{\sphericalangle PSA} = \overline{\sphericalangle PSB} \qquad (1)$$

in den Dreiecken SPA, SBP,

so ist

$$\beta < \beta + \varphi < 180^\circ - \beta',$$

also kann die Bedingung (b) (nicht mit $\beta = 180^\circ - \beta'$, sondern) nur mit

$$\beta = \beta' \qquad (2)$$

erfüllt sein.

Aus (1) und (2) folgt $\triangle SPA \sim \triangle SBP$ und daraus $\overline{PS}:\overline{AS} = \overline{BS}:\overline{PS}$, also

$$\overline{PS}^2 = \overline{AS} \cdot \overline{BS}.$$

Daher gilt (beispielsweise) nach dem Kathetensatz

$$\overline{PS} = \overline{CS} \qquad (3)$$

für einen Punkt C, der so gelegen ist, daß

SBC ein rechtwinkliges Dreieck (4)

ist, das

SB als Hypotenuse (5)

und darauf

A als Höhenfußpunkt (6)

hat. Nach der Umkehrung des Thalessatzes folgt aus (4),(5):

C liegt auf dem Kreis, der SB als Durchmesser hat.

Hiernach und nach (6),(3) ergibt sich, daß P ein Punkt ist, der durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) Konstruktionsbeschreibung (Abb. L 261033 b ohne gestrichelte Linien):

(7) Man konstruiert den Kreis c der SB als Durchmesser hat.

(8) Man errichtet in A die Senkrechte auf SB. Einen der Punkte, in denen sie c schneidet, bezeichnet man mit C.

(9) Man konstruiert den Kreis k um S mit dem Radius $\overline{CS}$. Jeder der beiden Punkte P_1, P_2, in denen er g schneidet, kann als Punkt P gewählt werden.

(III) Wenn ein Punkt P nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt (Abb. L 261033 b mit $P = P_1$ oder $P = P_2$):
Nach (9) liegt P auf g, also ist (a) erfüllt.
Nach (7),(8) und dem Thalessatz ist SBC ein rechtwinkliges Dreieck, das SB als Hypotenuse hat. Nach (8) ist A der Höhenfußpunkt auf der Hypotenuse. Also gilt nach dem Kathetensatz

$$\overline{CS}^2 = \overline{AS} \cdot \overline{BS};$$

hiernach und nach (9) ist $\overline{PS}^2 = \overline{AS} \cdot \overline{BS}$, also

$$\overline{PS} : \overline{AS} = \overline{BS} : \overline{PS}.$$

Hieraus und aus

$$\overline{\sphericalangle PSA} = \overline{\sphericalangle PSB}$$

folgt $\triangle SPA \sim \triangle SBP$ und daher

$$\overline{\sphericalangle SBP} = \overline{\sphericalangle SPA},$$

und hiermit ist auch (b) erfüllt.

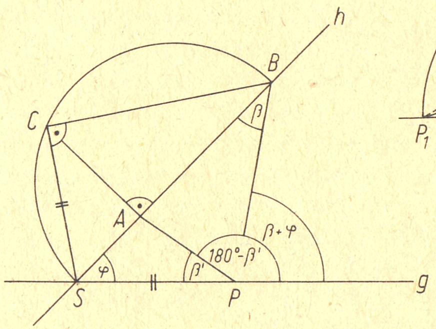

Abb. L 261033 a

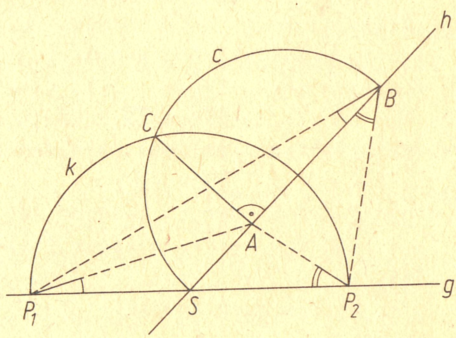

Abb. L 261033 b

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

261034) Lösung: 6 Punkte

Gleichung (1) ist äquivalent mit

$$z = (x+1)^2 + y^2 - 23.$$

Daher liegt es nahe, alle ganzzahligen x, y danach zu unterscheiden, welche Werte die natürlichen Zahlen $|x+1|$ und $|y|$ haben:

1. Sind diese beiden Zahlen

$$|x+1| \leqq 4 \text{ und } |y| \leqq 4,$$

so gibt es genau die folgenden Möglichkeiten:

1.1. Es gilt $|x+1| \leqq 3$ und $|y| \leqq 3$.
In diesem Fall ist $z \leqq 9 + 9 - 23$ keine natürliche Zahl.

1.2. Es gilt $|x+1| = 4$ und $|y| \leqq 2$
oder $|x+1| \leqq 2$ und $|y| = 4$.
In diesen Fällen ist $z \leqq 16 + 4 - 23$ keine natürliche Zahl.

1.3. Es gilt $|x+1| = 4$ und $|y| = 3$
oder $|x+1| = 3$ und $|y| = 4$.
In diesen Fällen ist $z = 16 + 9 - 23 = 2$.

1.4. Es gilt $|x+1| = 4$ und $|y| = 4$.
In diesem Fall gilt $z = 16 + 16 - 23 = 9$.

2. Ist von den beiden Zahlen $|x+1|$, $|y|$

$$|x+1| \geqq 5 \text{ oder } |y| \geqq 5,$$

so gilt $z \geqq 25 - 23 = 2$.
Dabei gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn einer der Fälle

2.1. $|x+1| = 5$ und $y = 0$
oder
2.2. $x+1 = 0$ und $|y| = 5$
vorliegt.

Damit ist gezeigt: Der kleinste in (1) für ganzzahlige x, y angenommene Wert z, der eine natürliche Zahl ist, ist

$$z = 2;$$

dieser Wert ergibt sich genau für die in 1.3., 2.1., 2.2. genannten Fälle.

Die folgende Tabelle zeigt die Ermittlung aller in diesen Fällen auftretenden Paare (x;y):

Fall	x+1	y	(x;y)
1.3.	4	3	(3;3)
	4	-3	(3;-3)
	-4	3	(-5;3)
	-4	-3	(-5;-3)
	3	4	(2;4)
	3	-4	(2;-4)
	-3	4	(-4;4)
	-3	-4	(-4;-4)
2.1.	5	0	(4;0)
	-5	0	(-6;0)
2.2.	0	5	(-1;5)
	0	-5	(-1;-5)

261035) Lösung: 7 Punkte

Wird die Kugel von einer Ebene e_1 geschnitten, so entsteht als Schnittfigur mit der Kugeloberfläche ein Kreis k_1, der die Kugeloberfläche in genau zwei Teilflächen zerlegt. Beim Schnitt mit einer zweiten Ebene $e_2 \neq e_1$ entsteht als Schnittfigur mit der Kugeloberfläche ein Kreis k_2. Er kann mit e_1 (wie jeder Kreis mit jeder Ebene, in der er nicht liegt) höchstens zwei Punkte gemeinsam haben und wird dadurch in höchstens zwei Teilbögen zerlegt. Jeder dieser Teilbögen zerlegt seinerseits diejenige bereits vorliegende Teilfläche, in der er ganz (in sich geschlossen oder sie durchquerend) enthalten ist, in genau zwei neue Teilflächen, vermehrt also die Anzahl der bereits vorliegenden Teilflächen um genau 1. Somit entstehen höchstens 2+2 = 4 Teilflächen.

Entsprechend folgt schrittweise weiter: Beim Schnitt mit

einer dritten/vierten/fünften Ebene e_3 / e_4 / e_5,

die verschieden ist von allen vorangehenden Ebenen, entsteht als Schnittfigur mit der Kugeloberfläche

ein Kreis k_3 / k_4 / k_5.

Er kann

mit e_1 und e_2 / mit e_1, e_2, e_3 / mit e_1, e_2, e_3, e_4

höchstens je zwei Punkte gemeinsam haben und wird dadurch in

höchstens 4 / 6 / 8 Teilbögen

zerlegt. Fügt man diese Teilbögen schrittweise einzeln zu der jeweils erreichten Zerlegung der Kugeloberfläche hinzu, so ergibt sich: Jeder Teilbogen bewirkt für diejenige bereits vorliegende Teilfläche, in der er ganz enthalten ist, entweder eine Aufteilung in genau zwei neue Teilflächen oder aber keine Aufteilung (nämlich falls die Teilfläche noch an einer anderen, von dem Teilbogen nicht durchquerten Stelle zusammenhängt). Somit entstehen

höchstens 4+4 = 8 / 8+6 = 14 / 14+8 = 22

Teilflächen, w.z.b.w.

Hinweise:

1. Es ist zu erwarten, daß (auch bei insgesamt gleichartigem Beweisaufbau) die Formulierungen in Schülerlösungen sich stark von der obigen Ausformulierung unterscheiden. Diese soll auf diejenigen geometrischen Sachverhalte hinweisen, für die - auch bei anderer Darstellung eines Lösungsweges - zu prüfen ist, ob ihre Bedeutung für den Lösungsablauf beachtet wurde.

2. Die Anzahl von 22 Teilflächen kann durch geeignete Wahl von 5 Ebenen erreicht werden. Diese Angabe wird nicht vom Schüler gefordert (erst recht nicht ein Nachweis hierzu).

261036) Lösung: 7 Punkte

Für jedes $x > 1$ gilt

$$0 < 9x + 8.$$

Durch Addition von $27x^3 + 54x^2 + 27x$ folgt

$$27(x^3 + 2x^2 + x) < 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8. \qquad (1)$$

Wegen $x(x+1)^2 > 0$ existiert $\sqrt[3]{x(x+1)^2}$. Nach dem Satz, daß aus $p^3 < q^3$ stets $p < q$ folgt, ergibt sich aus (1)

$$3 \cdot \sqrt[3]{x(x+1)^2} < 3x + 2,$$

also

$$3\left(\sqrt[3]{x(x+1)^2} - x\right) < 2. \qquad (2)$$

Für jedes $x > 1$ gilt ferner

$$8 < 9x.$$

Daraus erhält man entsprechend

$$27(x^3 - 2x^2 + x) < 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8,$$

$$3 \cdot \sqrt[3]{x(x-1)^2} < 3x - 2,$$

$$2 < 3\left(x - \sqrt[3]{x(x-1)^2}\right). \qquad (3)$$

Wegen $x > 1$ existieren $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[3]{(x+1)^2}$ und $\sqrt[3]{(x-1)^2}$, und es gilt $\sqrt[3]{x} > 0$.
Dividiert man (2) und (3) durch $2 \cdot \sqrt[3]{x}$, so folgen die zu beweisenden Ungleichungen.

<u>Hinweis</u>:Zum rechnerischen Auffinden des Beweisweges wird man ausgehend von der Behauptung ermitteln, aus welchen anderen Ungleichungen sie geschlossen werden kann. Wird ein Lösungsweg in dieser umgekehrten Reihenfolge angegeben, so ist (für eine Bewertung als vollständiger Lösungsweg) erforderlich, daß die für den Beweis hinreichende Schlußrichtung kenntlich gemacht wird.