XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 10

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

261021

Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen x und y, für die

$$3x^2 + 3y^2 - 18x + 12y + 27 = 0$$

gilt!

261022

Schneidet man einen Quader mit einer Ebene, so entsteht als Schnittfigur entweder ein Punkt oder eine Strecke oder ein n-Eck.

(a) Ist es möglich, daß dieses n-Eck zwar ein Viereck, aber kein Trapez ist?

(b) Ist es möglich, daß dieses n-Eck zwar ein Viereck, aber kein Parallelogramm ist?

261023

Zahlen stellen wir gewöhnlich im dekadischen Positionssystem (unter Verwendung der Basis 10 und der Ziffern 0,1,...,9) dar. Man kann die Zahlen auch im dyadischen Positionssystem (oder Dualsystem) unter Verwendung der Basis 2 und der Ziffern 0 und 1 darstellen.

Zur Unterscheidung sei diese dyadische Darstellung einer Zahl durch eckige Klammern und eine klein angehängte 2 gekennzeichnet.

a) Geben Sie für die Zahl 47 die dyadische Darstellung an!
Ermitteln Sie für die Zahl, deren Darstellung im dyadischen System $[1\,1\,0\,0\,0\,1]_2$ lautet, die Darstellung im dekadischen Positionssystem!

A 10

b) Eine natürliche Zahl heiße "dekadische Spiegelzahl", wenn ihre dekadische Darstellung von rechts nach links gelesen dieselbe Ziffernfolge ergibt wie von links nach rechts gelesen. Ermitteln Sie mindestens zwei natürliche Zahlen, die größer als 9 sind und die Eigenschaft haben, sowohl dekadische als auch dyadische Spiegelzahl zu sein!

<u>261024</u>

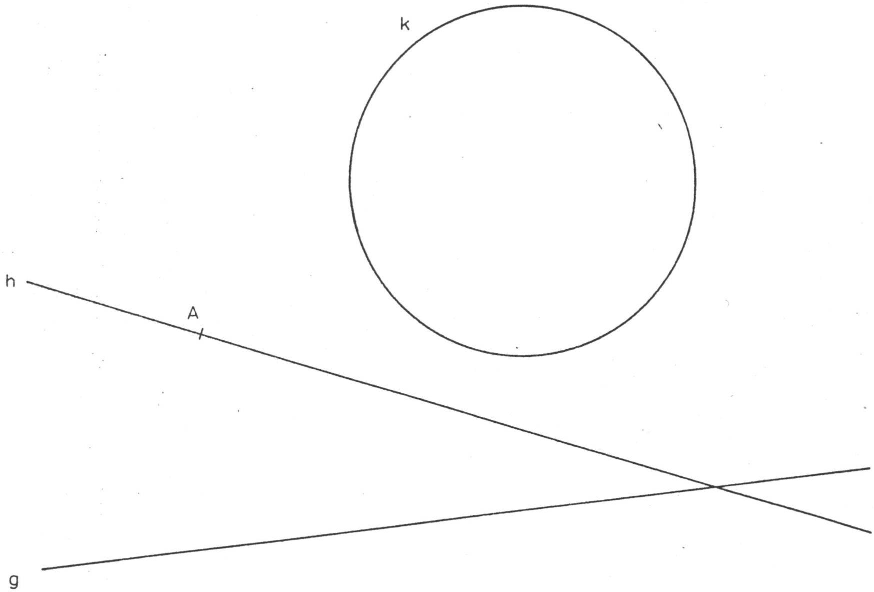
Auf dem Arbeitsblatt sind zwei Geraden g und h, ein Punkt A auf h und ein Kreis k eingetragen.

Untersuchen Sie, ob es einen Rhombus ABCD gibt, der außer der gegebenen Ecke A seine Ecke B auf g, die Ecke C auf h und die Ecke D auf k hat!

Untersuchen Sie, ob es mehr als einen Rhombus mit diesen Eigenschaften gibt! Wenn dies der Fall ist, sind dann alle derartigen Rhomben zueinander kongruent?

<u>Hinweis:</u> Der Lösungstext (nicht auf dem Arbeitsblatt) soll sich auf genau diejenige gegenseitige Lage der gegebenen g,h,k und A beziehen, die auf dem Arbeitsblatt ersichtlich ist. Das Arbeitsblatt (das für Konstruktionsschritte genutzt werden kann) ist abzugeben.

Arbeitsblatt zu Aufgabe 261024



Umlaut

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

<u>Lösungen und Punktbewertung</u>

Olympiadeklasse 10

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

<u>261021) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

I. Wenn ein Paar $(x;y)$ ganzer Zahlen die geforderte Gleichung erfüllt, so folgt

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 &= 0, \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 &= 4, \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 &= 4; \end{aligned}$$

d. h., 4 ist als Summe zweier Quadratzahlen $(x-3)^2$ und $(y+2)^2$ dargestellt.

Die einzigen Möglichkeiten hierzu sind

1. $(x-3)^2 = 0,\ (y+2)^2 = 4,$
2. $(x-3)^2 = 4,\ (y+2)^2 = 0.$

Hieraus folgt weiter:

1.1. $x-3 = 0,\ y+2 = 2,$ also $(x;y) = (3;0),$

1.2. $x-3 = 0,\ y+2 = -2,$ also $(x;y) = (3;-4),$

2.1. $x-3 = 2,\ y+2 = 0,$ also $(x;y) = (5;-2),$

2.2. $x-3 = -2,\ y+2 = 0,$ also $(x;y) = (1;-2).$

Daher können nur diese vier Paare die geforderte Gleichung erfüllen.

II. Sie erfüllen diese Gleichung; denn es gilt

$$\begin{aligned} 3\cdot 3^2 + 3\cdot 0^2 - 18\cdot 3 + 12\cdot 0 + 27 &= 27 + 0 - 54 + 0 + 27 = 0, \\ 3\cdot 3^2 + 3\cdot(-4)^2 - 18\cdot 3 + 12\cdot(-4) + 27 &= 27 + 48 - 54 - 48 + 27 = 0, \\ 3\cdot 5^2 + 3\cdot(-2)^2 - 18\cdot 5 + 12\cdot(-2) + 27 &= 75 + 12 - 90 - 24 + 27 = 0, \\ 3\cdot 1^2 + 3\cdot(-2)^2 - 18\cdot 1 + 12\cdot(-2) + 27 &= 3 + 12 - 18 - 24 + 27 = 0. \end{aligned}$$

Daher erfüllen genau die vier angegebenen Paare die geforderte Gleichung.

Eine <u>andere Lösungsmöglichkeit</u> besteht z. B. darin, aus $(x-3)^2 = -y(y+4)$ die Bedingung $y(y+4) \leqq 0$ herzuleiten, die nur für $-4 \leqq y \leqq 0$ erfüllt ist. Somit braucht man nur die fünf Werte $y = -4, -3, -2, -1, 0$ daraufhin zu diskutieren, ob für sie $-y(y+4)$ eine Quadratzahl ist.

261022) Lösung: 10 Punkte

(a) Für jede Ebene E, die den Quader in einem n-Eck schneidet, gilt: Jede Seite dieses n-Ecks ist der Durchschnitt der Ebene E mit (mindestens) einer Seitenfläche des Quaders. Dabei sind zwei verschiedene Seiten des n-Ecks nur dann in derselben Seitenfläche des Quaders enthalten, wenn diese Seitenfläche ganz in der Ebene E liegt und daher die gesamte Schnittfigur ist. In diesem Fall also ist das n-Eck ein Rechteck und somit ein Trapez. In jedem anderen Fall aber, in dem ein Viereck entsteht, gibt es folglich vier paarweise verschiedene Seitenflächen des Quaders, deren Durchschnitte mit E die vier Vierecksseiten sind.

Da der Quader nicht mehr als drei paarweise nichtparallele Seitenflächen besitzt, müssen sich unter den genannten Seitenflächen mindestens zwei zueinander parallele befinden. Die (zueinander parallelen) Ebenen, in denen zwei solche Seitenflächen liegen, werden von der Ebene E in zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten; das Viereck hat also (mindestens) zwei zueinander parallele Seiten und ist folglich ein Trapez.

Die in (a) gestellte Frage muß daher mit nein beantwortet werden.

(b) Die in (b) gestellte Frage ist zu bejahen, wie man durch ein Beispiel der folgenden Art beweisen kann: Auf den Seiten AB und BC eines Quaders ABCDEFGH (Abb. L 261022) wähle man je einen Punkt P bzw. Q; auf den entsprechenden Seiten EF und FG der ABCD gegenüberliegenden Fläche EFGH zwei Punkte R bzw. S mit $\overline{FR} < \overline{BP}$ und $RS \parallel PQ$. Wegen $FR \parallel BP$ wird dann $\overline{\sphericalangle FRS} = \overline{\sphericalangle BPQ}$; hieraus und aus $\overline{\sphericalangle RFS} = 90^\circ = \overline{\sphericalangle PBQ}$ folgt $\triangle FRS \sim \triangle BPQ$, also

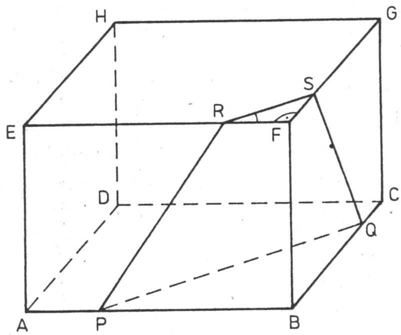


Abb. L 261022

$(\overline{FS}:\overline{BQ} = \overline{FR}:\overline{BP} < 1$, d. h. $\overline{FS} < \overline{BQ} < \overline{BC} = \overline{FG}$, also ist die genannte Wahl von S auf FG tatsächlich möglich, und es gilt $\overline{RS}:\overline{PQ} = \overline{FR}:\overline{BP} < 1$, d. h. $\overline{RS} < \overline{PQ}$.

Wegen $RS \parallel PQ$ liegen P,Q,R,S in einer und derselben Ebene; diese hat als Schnittfigur mit dem Quader das Viereck PQSR, das wegen $\overline{RS} < \overline{PQ}$ kein Parallelogramm ist.

<u>261023) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

a) Es ist $47 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = [101111]_2$
und $[110001]_2 = 2^5 + 2^4 + 2^0 = 49$.

b) Indem man z. B. die kleinsten dekadischen Spiegelzahlen, die größer als 9 sind (also 11, 22, ...), durchprobiert, findet man

$33 = [100001]_2, \quad 99 = [1100011]_2.$

<u>Bemerkungen:</u> Das Beispiel 99 kann man auch durch die Überlegung erhalten, daß sowohl die dekadisch ausgeführte Multiplikation $33 \cdot 3$ als auch die dyadisch ausgeführte Multiplikation

$$\begin{array}{r} [100001]_2 \cdot [11]_2 \\ \hline 100001 \\ 100001 \\ \hline [1100011]_2 \end{array}$$

eine Spiegelzahl ergibt.

Weitere Beispiele lassen sich folgendermaßen finden: Um eine oberhalb der dyadischen Spiegelzahl $2^8+2^0 = 257$ gelegene dekadische Spiegelzahl zu bilden, kann man eine Zahl mit der Zehnerziffer 5 addieren (so daß die Hunderterziffer 3 entsteht), und zwar wähle man als zu addierende Einerziffer 6 (dann entsteht auch die Einerziffer 3). Wegen $56 = 2^5+2^4+2^3$ ergibt sich so $313 = 2^8+2^5+2^4+2^3+2^0 = [100111001]_2$.

Beim Durchprobieren (endlicher) geometrischer Reihen mit Zweierpotenzen als Quotient stößt man (außer auf $1+2^5 = 33$ und $3+3\cdot2^5 = 99$) auf $1+8+64+512$. Diese Zahl hat die Einerziffer 5, und sie ist dreistellig mit der Hunderterziffer 5. Es ist die Spiegelzahl $585 = [1001001001]_2$.

Das Produkt $7\cdot11\cdot13 = 1001$ legt es nahe, zu einigen der gefundenen Zahlen auch ihre Produkte mit 1001 oder auch mit $7\cdot13 = 91$ durchzuprobieren; so findet man etwa $9009 = 99\cdot91 = [10001100110001]_2$, $5325 = 585\cdot91 = [1100111111110011]_2$, $585585 = 585\cdot1001 = [10001110111101110001]_2$.

Als weitere Anregung (und zur Unterstützung des Korrigierens) seien die (durch umfangreichere Probierverfahren zu erhaltenden) sämtlichen Lösungen unterhalb 10^{10} aufgezählt: 33, 99, 313, 585, 717, 7447, 9009, 15351, 32223, 39993, 53235, 53835, 73737, 585585, 1758571, 1934391, 3129213, 5071705, 5259525, 5841485, 13500531, 719848917, 910373019, 939474939, 1290880921, 7451111547.

261024) Lösung: 10 Punkte

Konstruktion auf dem Arbeitsblatt

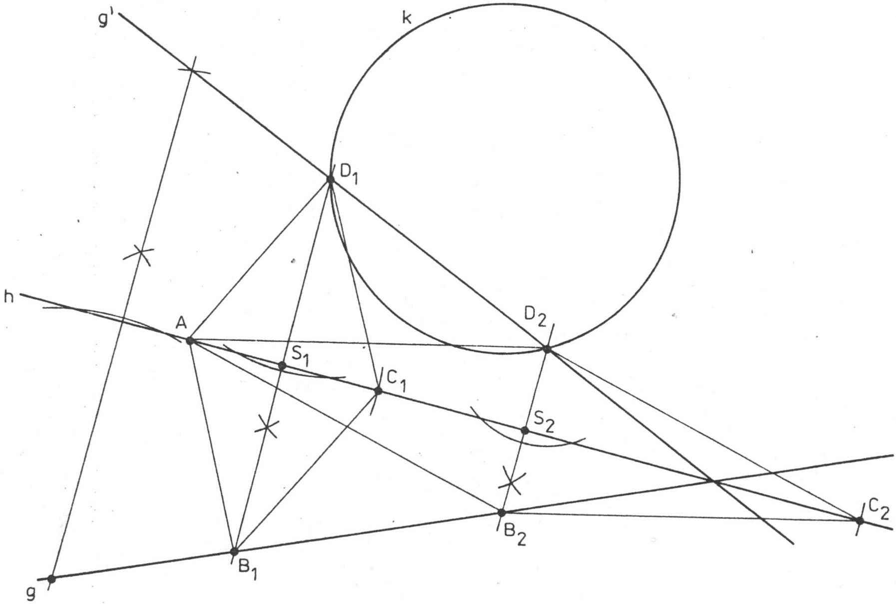


Abb. L 261024

Wenn es einen Rhombus ABCD mit den genannten Eigenschaften gibt, so liegt seine Diagonale AC in der Geraden h, also geht B bei der Spiegelung an h in D über. Konstruiert man also diejenige Gerade g', die aus g durch die Spiegelung an h entsteht, so muß D ein Schnittpunkt von g' mit k sein.

Wie die Konstruktion auf dem Arbeitsblatt zeigt, schneiden sich g' und k in genau zwei Punkten D_1 und D_2. Für jeden dieser beiden Punkte gilt: Spiegelt man ihn an h, so liegt der erhaltene Punkt B_1 bzw. B_2 wieder auf g. Ferner gilt: Schneidet h die Strecke B_1D_1 bzw. die Strecke B_2D_2 in S_1 bzw. S_2 und verlängert man die Strecke AS_1 bzw. AS_2 um ihre eigene Länge bis C_1 bzw. C_2, so liegt der erhaltene Punkt C_1 bzw. C_2 auf h, und sowohl $AB_1C_1D_1$ als auch $AB_2C_2D_2$ ist je ein Viereck, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen und einander halbieren, also je ein Rhombus.

L 10

Es gibt also mehr als einen Rhombus mit den genannten Eigenschaften; ferner wird (bei der auf dem Arbeitsblatt vorgegebenen Lage) offensichtlich $AD_1 \neq AD_2$; d. h., die beiden Rhomben $AB_1C_1D_1$ und $AB_2C_2D_2$ haben voneinander verschiedene Seitenlänge. Sie sind folglich nicht zueinander kongruent.

<u>Bemerkung:</u> Die Inkongruenz der beiden Rhomben kann z. B. auch aus $\overline{\sphericalangle B_2AD_2} < \overline{\sphericalangle B_1AD_1}$ und $\overline{\sphericalangle B_2AD_2} < \overline{\sphericalangle AB_1C_1}$ geschlossen werden. Dagegen reicht die Feststellung nur einer dieser beiden Ungleichungen nicht aus (falls nicht ausdrücklich die zu widerlegende Kongruenz $AB_1C_1D_1 \cong AB_2C_2D_2$ mit der Zusatzforderung verstanden wird, daß jeweils A,A und B_1,B_2 und C_1,C_2 und D_1,D_2 entsprechende (homologe) Ecken sein sollen).

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 10 Gesamtpunktzahl: 40

261021

Ableitung notwendiger Bedingungen	6 Punkte
Angabe der vier Paare mit "Probe"	4 Punkte
	10 Punkte

261022

a) Seitenfläche des Quaders ist Schnittfigur	1 Punkt
Antwort im allgemeinen Fall	5 Punkte
b) Angabe eines geeigneten Beispiels	2 Punkte
Begründung	2 Punkte
	10 Punkte

261023

a)	2 Punkte
b) pro Spiegelzahl 4 Punkte	8 Punkte
	10 Punkte

261024

Nachweis für die Existenz eines Rhombus	4 Punkte
Nachweis für die Existenz eines zweiten Rhombus	2 Punkte
Nachweis der Inkongruenz	4 Punkte
	10 Punkte