A 9;I

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

260931

Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen, für die die Gleichung

$$2(a + b) = ab$$

gilt!

260932

In einer Ebene e sei ein Dreieck ABC fest vorgegeben. Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten BC, CA, AB seien U, V bzw. W in dieser Reihenfolge.

Weiter sei P ein beliebiger Punkt der Ebene e. Spiegelt man P sowohl an U, V als auch an W, so erhält man die Bildpunkte P_U, P_V bzw. P_W.

(Unter dem Bildpunkt P_S von P bei der Spiegelung an einem Punkt S versteht man denjenigen Punkt, für den gilt, daß S der Mittelpunkt der Strecke PP_S ist. Falls $P = S$ ist, ist $P_S = P$.)

Beweisen Sie, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $P_UP_VP_W$ unabhängig von der Lage des Punktes P ist, und vergleichen Sie diesen Flächeninhalt mit dem des Dreiecks ABC!

30 10 08-1

A 9;I

260933

Wenn eine reelle Zahl a gegeben ist, so werde jeder reellen Zahl x eine Zahl y, nämlich

$$y = \frac{x^3 + x^2 + ax + 1}{x^2 + 1},$$

zugeordnet.

(A) Ermitteln Sie, wenn a = - 3 gegeben ist, zwei ganze Zahlen x, deren zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind!

(B) Ermitteln Sie eine reelle Zahl a, für die die folgende Aussage (*) gilt!

(*) Wenn die Zahl a gegeben ist, so gibt es unendlich viele ganze Zahlen x, deren jeweils zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind.

(C) Untersuchen Sie, ob es außer der in (B) ermittelten Zahl a noch eine andere reelle Zahl a gibt, für die die Aussage (*) gilt!

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

260934

Beweisen Sie folgenden Satz:

Wenn a und b zwei von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, die nicht beide Quadratzahlen sind und für die $\frac{a}{b}$ ein so weit wie möglich gekürzter Bruch ist, dann ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eine irrationale Zahl.

260935

Von einem Viereck ABCD werde vorausgesetzt:

(1) ABCD ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.

(2) Es gilt $\overline{AB} > \overline{CD}$.

(3) Die Summe der Größen der Innenwinkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABC$ beträgt 90°.

Der Mittelpunkt von AB sei M, der Mittelpunkt von CD sei N.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} - \overline{CD})$$

gilt!

260936

(a) Ein regelmäßiges Tetraeder ABCD soll durch eine Ebene e, die durch den Punkt A geht, in zwei Tetraeder T_1, T_2 zerlegt werden.

Skizzieren Sie eine derartige Zerlegung, z. B. in Kavalierperspektive, und beschreiben Sie, welche Lage e in bezug auf die drei Punkte B, C, D bei derartigen Zerlegungen haben muß!

(b) Beweisen Sie, daß es unter den in (a) genannten Ebenen genau drei gibt, bei denen T_1 volumengleich zu T_2 wird!

30 10 08-1

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

260931) Lösung: 6 Punkte

I. Wenn ein Paar (a;b) natürlicher Zahlen die geforderte Gleichung erfüllt, so folgt

$$a(b-2) = 2b. \tag{1}$$

Ferner folgt $b \neq 2$, da $b = 2$ auf den Widerspruch $0 = 4$ führen würde. Somit ergibt sich aus (1)

$$a = \frac{2b}{b-2} = \frac{2(b-2)+4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}. \tag{2}$$

Daher (und weil mit b auch b-2 eine ganze Zahl ist) muß b-2 einer der Teiler von 4 sein, der zugleich (wegen $b \geqq 0$) noch $b-2 \geqq -2$ erfüllt, d. h. eine der Zahlen $-2, -1, 1, 2, 4$ ist. Somit ist b eine der Zahlen 0, 1, 3, 4, 6, von denen noch $b = 1$ ausscheidet (da dies nach (2) auf $a = -2$ führen würde). Zu $b = 0,3,4,6$ gehört dann nach (2) jeweils $a = 0,6,4,3$. Daher können unter den Paaren natürlicher Zahlen nur

$$(0;0),\ (6;3),\ (4;4),\ (3;6) \tag{3}$$

die geforderte Gleichung erfüllen.

II. Sie erfüllen diese Gleichung, wie aus
$2\cdot(0+0) = 0 = 0\cdot 0$, $2\cdot(3+6) = 18 = 3\cdot 6$, $2\cdot(4+4) = 16 = 4\cdot 4$
ersichtlich ist.

Somit erfüllen genau die in (3) genannten Paare die Bedingungen der Aufgabe.

Andere Lösungsmöglichkeiten:
Die geforderte Gleichung ist äquivalent zu $(a-2)(b-2) = 4$, und die sämtlichen Zerlegungen von 4 in das Produkt zweier ganzer Zahlen $a-2 \geqq -2$, $b-2 \geqq -2$ sind $(-2)\cdot(-2) = 1\cdot 4 = 2\cdot 2 = 4\cdot 1$.

Eine andere Möglichkeit ist, die geforderte Gleichung für $a > 0$, $b > 0$ äquivalent in $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ umzuformen. Diese Gleichung wird von $(a;b) = (4;4)$ erfüllt; zu kleineren (positiven) a als 4 müssen größere b gehören und umgekehrt. Andererseits kann nicht $a \leqq 2$ sein, da dies $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \geqq \frac{1}{2}$ ergäbe. Ebenso scheidet $b \leqq 2$ aus.

Daher verbleiben (außer $(a;b) = (0;0)$, $(4;4)$) nur die Möglichkeiten, daß entweder $a = 3$, $b = 6$ oder $b = 3$, $a = 6$ ist.

<u>260932)Lösung</u>: <u>6 Punkte</u>

Nach Definition von P_U und P_V gilt <u>im Fall $P \neq U$, $P \neq V$</u> (Abb. L 260932 a):

Die Punkte P_U, P_V liegen auf den Strahlen aus P durch U bzw. V so, daß

$$\overline{PU} : \overline{PP_U} = 1:2 \quad \text{und} \quad \overline{PV} : \overline{PP_V} = 1:2$$

gilt. Nach der Umkehrung des Strahlensatzes ist somit

$$UV \parallel P_U P_V,$$

und nach dem Strahlensatz folgt

$$\overline{UV} : \overline{P_U P_V} = 1:2. \qquad (1)$$

<u>Im Fall $P = U$</u> (also $P \neq V$) (Abb. L 260932 b) liegt P_V auf dem Strahl aus P durch V so, daß $\overline{PV} : \overline{PP_V} = 1:2$ gilt, und wegen $P = U = P_U$ ergibt sich ebenfalls (1). Entsprechend gilt (1) auch <u>im Fall $P = V$</u> (also $P \neq U$).

Damit und weil[1]

$$\overline{UV} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$$

gilt, folgt stets

$$\overline{P_U P_V} = 2 \cdot \overline{UV} = \overline{AB}.$$

Entsprechend erhält man

$$\overline{P_U P_W} = \overline{AC} \quad \text{und} \quad \overline{P_V P_W} = \overline{BC}.$$

Also ist $P_U P_V P_W$ nach dem Kongruenzsatz sss ein zu ABC kongruentes Dreieck und hat folglich denselben Flächeninhalt wie ABC.

<u>Bemerkung</u>: Man kann auch z. B. $P_U P_V \parallel UV \parallel AB$ zeigen und zum weiteren Beweis heranziehen.

---

1 entsprechend wie (1) zu beweisen oder als bekannter Sachverhalt zu zitieren

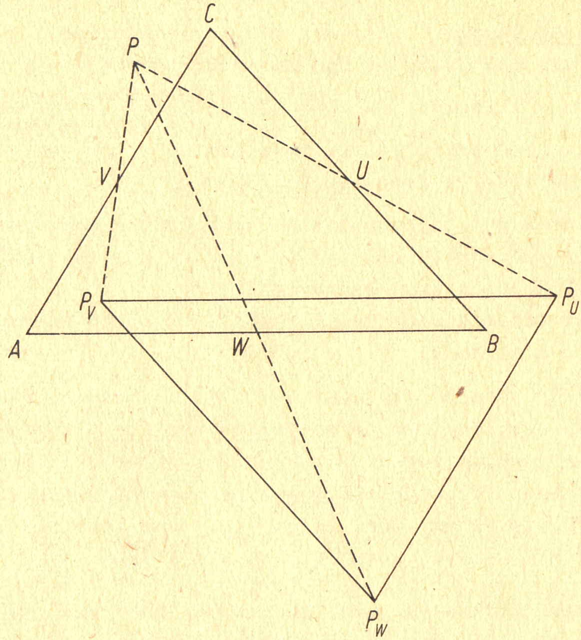


Abb. L 260932 a

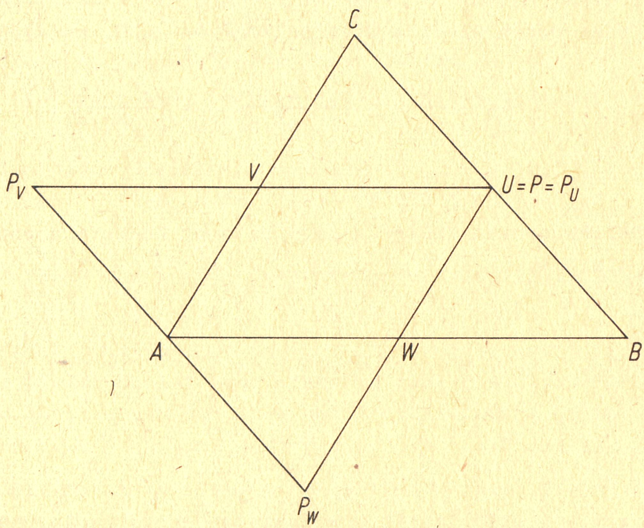


Abb. L 260932 b

260933) Lösung: 8 Punkte

(A) Für $x = 0$ lautet die zugeordnete Zahl $y = 1$.

Für $x = 1$ lautet die zugeordnete Zahl $y = \frac{1 + 1 - 3 + 1}{1 + 1} = 0$.

Damit sind (z. B.)[1] die zwei Zahlen $x = 0$, $x = 1$ ermittelt, die die geforderte Bedingung erfüllen.

(B) Wenn $a = 1$ gegeben ist, so gilt für jede ganze Zahl x:
Die zugeordnete Zahl $y = (x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 + 1) = x + 1$ ist ebenfalls eine ganze Zahl.
Damit ist als eine reelle Zahl a, für die die Aussage (*) gilt, $a = 1$ ermittelt.

(C) Für jede reelle Zahl $a \neq 1$ gilt dagegen: Wenn die Zahl a gegeben ist, so gibt es höchstens endlich viele ganze Zahlen x, deren jeweils zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind.
Dies kann folgendermaßen bewiesen werden: Wie die Durchführung der Division mit Rest zeigt, ist jeweils einer Zahl x die Zahl
$y = (x^3+x^2+ax+1) : (x^2+1) = x + 1 + \frac{(a - 1)x}{x^2 + 1}$
zugeordnet. Ist x ganz, so ist nur dann ebenfalls y ganz, wenn auch $\frac{(a - 1)x}{x^2 + 1}$ eine ganze Zahl ist. Ist insbesondere $x \neq 0$ ganz, so ist dies wegen $a - 1 \neq 0$, also $\frac{(a - 1)x}{x^2 + 1} \neq 0$, nur möglich, wenn

$$1 \leqq \left|\frac{(a - 1)x}{x^2 + 1}\right| < \left|\frac{(a - 1)x}{x^2}\right| = \left|\frac{a - 1}{x}\right| ,$$

also

$$|x| < |a - 1|$$

gilt. Solche ganzen Zahlen x gibt es aber höchstens endlich viele, w.z.b.w.

---

1 Auch $x = -1$ erfüllt mit $y = 2$ die genannte Bedingung, alle ganzen $x \neq 0, \pm 1$ dagegen nicht. Diese Angaben werden nicht vom Schüler verlangt.

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

260934) Lösung: 6 Punkte

Der Beweis, daß unter den angegebenen Voraussetzungen $\sqrt{\frac{a}{b}}$ irrational ist, erfolgt indirekt:

Wäre $\sqrt{\frac{a}{b}}$ rational, so gäbe es natürliche Zahlen m, n mit $n \neq 0$ und
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{m}{n}$, also $\frac{a}{b} = \frac{m^2}{n^2}$,

$$an^2 = bm^2. \qquad (1)$$

Wegen $a \neq 0$ und $n \neq 0$ stünde auf beiden Seiten von (1) dieselbe von 0 verschiedene natürliche Zahl, auf die somit der Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung anwendbar ist.
Nach der Voraussetzung, daß a und b nicht beide Quadratzahlen sind, sind nur die zwei folgenden Fälle zu betrachten:
1. Ist a nicht Quadratzahl, so kommt in der Primfaktorzerlegung von a (mindestens) ein Primfaktor p in ungerader Potenz vor. Da $\frac{a}{b}$ ein so weit wie möglich gekürzter Bruch ist, kommt p nicht in b vor. Also müßte p wegen (1) in derselben (ungeraden) Potenz in m^2 vorkommen, im Widerspruch dazu, daß jeder Primfaktor, der überhaupt in der Quadratzahl m^2 vorkommt, dort in gerader Potenz auftreten muß.
2. Ebenso folgt: Ist b nicht Quadratzahl, so kommt in der Primfaktorzerlegung von b (mindestens) ein Primfaktor q in ungerader Potenz vor. Er kommt in a nicht vor, müßte also in derselben (ungeraden) Potenz in n^2 vorkommen, was ebenfalls einen Widerspruch darstellt.

Damit hat die Annahme, $\sqrt{\frac{a}{b}}$ wäre rational, in jedem Fall auf einen Widerspruch geführt; folglich muß $\sqrt{\frac{a}{b}}$ irrational sein, w.z.b.w.

<u>260935) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Mit $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$ gilt wegen (2)

$$a > c.$$

Ferner ist $\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{a}{2}$, $\overline{DN} = \overline{CN} = \frac{c}{2}$;
für die auf AB liegenden Punkte A' und B' mit $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{DN} = \overline{CN}$ sind nach (1) daher AA'ND und BB'NC Vierecke mit je einem Paar paralleler und gleichlanger Seiten, also Parallelogramme. Wegen $a > c$, also $\frac{a}{2} > \frac{c}{2}$ liegt A' zwischen A und M sowie B' zwischen B und M.

Damit folgt

$$\overline{\sphericalangle B'A'N'} = \overline{\sphericalangle BAD} \qquad \overline{\sphericalangle A'B'N'} = \overline{\sphericalangle ABC}$$

(Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen), aus (3) also

$$\overline{\sphericalangle B'A'N'} + \overline{\sphericalangle A'B'N'} = 90^\circ.$$

Hiernach folgt aus dem Innenwinkelsatz

$$\overline{\sphericalangle A'NB'} = 90^\circ.$$

Nach der Umkehrung des Thalessatzes liegt somit N auf einem Halbkreis über A'B'. Da nun

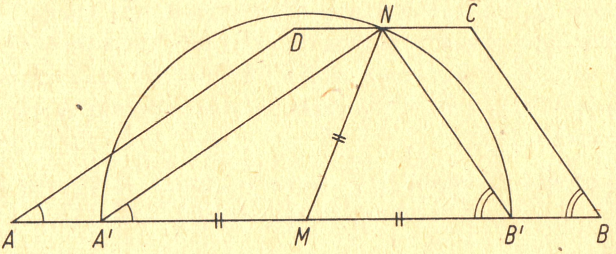
$$\overline{MA'} = \overline{MA} - \overline{AA'} = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} \text{ und } \overline{MB'} = \overline{MB} - \overline{BB'} = \frac{a}{2} - \frac{c}{2},$$

also $\overline{MA'} = \overline{MB'}$

gilt, ist M der Mittelpunkt dieses Halbkreises; folglich gilt auch $\overline{MN} = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{1}{2} \cdot (a - c)$,

w.z.b.w.

Abb. L 260935



260936) Lösung: 7 Punkte

(a) Skizze: Abb. L 260936.

Für jede derartige Zerlegung muß die Ebene e eine solche Lage in bezug auf B, C, D haben, daß das Dreieck BCD in zwei Dreiecke zerlegt wird.

Das ist nur möglich, indem e durch einen der drei Punkte B, C, D hindurchgeht und die Verbindungsstrecke der beiden anderen Punkte in einem dazwischenliegenden Punkt schneidet.

(b) Wenn e durch B geht und die Strecke CD in P schneidet, so sind die entstehenden Tetraeder T_1 = ABCP, T_2 = ABDP genau dann zueinander volumengleich, wenn die beiden Dreiecke BCP und BDP zueinander flächengleich sind; denn T_1 und T_2 haben die gleiche Höhe des Eckpunktes A über diesen Seitenflächen.

BCP und BDP sind genau dann zueinander flächengleich, wenn $\overline{CP} = \overline{DP}$ gilt; denn die Dreiecke BCP und BDP haben die gleiche Höhe des Punktes B über den Seiten CP bzw. DP.

Also hat eine Ebene durch (A und) B genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn sie durch den Mittelpunkt der Strecke CD geht.

Entsprechend folgt: Eine Ebene durch (A und) C hat genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn sie durch den Mittelpunkt von BD geht;

eine Ebene durch (A und) D hat genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn sie durch den Mittelpunkt von BC geht.

Somit haben genau diese drei Ebenen die geforderte Eigenschaft.

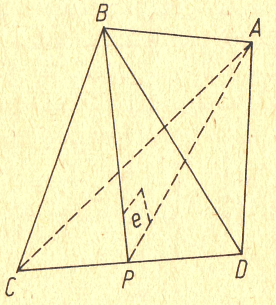


Abb. L 260936