kmlom/A

A 9

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>260921</u>
Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n auch

$$\frac{n^3 - 2n^2 - 4n + 8}{n + 2}$$

eine natürliche Zahl ist!

<u>260922</u>
Peter und Heinz erzählen, daß sie Dreiecke gezeichnet haben, deren Seitenlängen, gemessen in Zentimeter, die Maßzahlen

$$a = 3x + 9,$$
$$b = 5x + 8,$$
$$c = 4x + 1$$

hatten, wobei x eine zuvor gewählte von Null verschiedene natürliche Zahl war.
Anke behauptet: Für jede von Null verschiedene natürliche Zahl x gibt es ein Dreieck mit den so gebildeten Maßzahlen a,b,c seiner Seitenlängen.
Birgit behauptet: Es gibt eine von Null verschiedene Zahl x, für die ein Dreieck, das diese Seitenlängen hat, rechtwinklig ist.

Untersuchen Sie für jede dieser beiden Behauptungen, ob sie wahr ist!

A 9

260923

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel $(a;b;c)$ natürlicher Zahlen a,b,c, die die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllen!

(1) Es gilt $b < c$.

(2) b und c sind zueinander teilerfremd.

(3) a ist von jeder der Zahlen 4;9;12 verschieden.

(4) b und c sind von jeder der Zahlen 13;16;21 verschieden.

(5) Jede Zahl, die die Summe zweier verschiedener Zahlen der Menge $A = \{4;9;12;a\}$ ist, ist in der Menge $B = \{13;16;21;b;c\}$ enthalten.

260924

Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C wird gefordert, daß dieser rechte Winkel durch die Seitenhalbierende der Seite AB, die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$ und die auf der Seite AB senkrechte Höhe in vier gleichgroße Winkel zerlegt wird.

Untersuchen Sie, ob es ein Dreieck ABC gibt, das diese Forderungen erfüllt, und ob alle Dreiecke, für die das zutrifft, einander ähnlich sind! Ermitteln Sie, wenn dies der Fall ist, die Größen der Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ABC$!

Verlauft

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

260921) Lösung: 8 Punkte

Für jede natürliche Zahl gilt

$$n^3 - 2n^2 - 4n + 8 = n^2(n-2) - 4(n-2)$$
$$= (n^2-4)(n-2)$$
$$= (n+2)(n-2)(n-2);$$

daher und weil $n + 2 \neq 0$ für jede natürliche Zahl gilt, ist der zu untersuchende Bruch

$$\frac{n^3 - 2n^2 - 4n + 8}{n + 2} = (n-2)^2 \qquad (1)$$

das Quadrat einer ganzen Zahl, also eine nicht negative ganze Zahl, d. h. eine natürliche Zahl, w.z.b.w.

Bemerkung: Die Gleichung (1) kann auch durch Ausführung der Polynomdivision $(n^3-2n^2-4+8):(n+2)$ hergeleitet werden.

260922) Lösung: 10 Punkte

a) Für jede von Null verschiedene natürliche Zahl x gelten die drei Ungleichungen
$$a+b = 8x+17 > 4x+1 = c,$$
$$b+c = 9x+9 > 3x+9 = a,$$
$$c+a = 7x+10 > 5x+8 = b.$$
Aus diesen folgt, daß es ein Dreieck mit den Maßzahlen a,b,c seiner Seitenlängen gibt. Also ist Ankes Behauptung wahr.

b) Ein Dreieck mit diesen Seitenlängen ist rechtwinklig, wenn
$$b^2 = a^2 + c^2$$
durch Wahl einer natürlichen Zahl x erreichbar ist. Diese Bedingung besagt
$$25x^2 + 80x + 64 = 9x^2 + 54x + 81 + 16x^2 + 8x + 1,$$
$$18x = 18.$$
Sie wird also erfüllt, wenn $x = 1$ ist.
Also ist auch Birgits Behauptung wahr.

260923) Lösung: 11 Punkte

I. Wenn ein Tripel (a;b;c) natürlicher Zahlen die Bedingungen (1) bis (5) erfüllt, so folgt:
Alle Zahlen, die als Summe zweier verschiedener Zahlen der Menge A auftreten können, sind

13; 16; 21; 4+a; 9+a; 12+a.

Jede dieser Zahlen ist nach (5) eine der Zahlen 13;16;21;b;c.
Wegen (4) sind folglich die (nach (1) voneinander verschiedenen) Zahlen b und c zwei der Zahlen 4+a;9+a;12+a, die dritte dieser Zahlen (die paarweise voneinander verschieden sind) muß somit gleich einer der Zahlen 13;16;21 sein. Handelt es sich dabei um die Zahl 4+a, so kann sie weder gleich 13 noch gleich 16 sein, da dies auf a=9 oder a=12 führen würde, im Widerspruch zu (3); hiernach verbleibt also nur 4+a=21, d. h. a=17.
Handelt es sich um 9+a, so kann dies entsprechend weder gleich 13 noch gleich 21 sein; es verbleibt nur 9+a = 16, also a=7.
Würde es sich um 12+a handeln, so verbliebe entsprechend nur 12+a = 13, also a = 1; dies würde jedoch für b und c auf die Werte 4+a = 5 und 9+a = 10 führen, im Widerspruch zu (2).
Also verbleiben nur die beiden folgenden Möglichkeiten (M_1) und (M_2):

(M_1) Es ist a=17; und b und c sind die Zahlen 9+a=26 und 12+a=29, wegen (1) also b = 26, c = 29.

(M_2) Es ist a=7; und b und c sind die Zahlen 4+a=11 und 12+a=19, wegen (1) also b = 11, c = 19.

II. Die in (M_1), (M_2) genannten Tripel (a;b;c) erfüllen alle Bedingungen (1) bis (5); denn es gilt:

26 < 29 ; 11 < 19.

26 und 29 und ebenso 11 und 19 sind zueinander teilerfremd.
17 ist von jeder der Zahlen 4;9;12 verschieden; ebenso 7.
26 und 29 sind von jeder der Zahlen 13;16;21 verschieden, ebenso 11 und 19.
Als Summe zweier verschiedener Zahlen aus A = {4;9;12;17} treten genau die Zahlen aus B = {13;16;21;29} auf;
als Summe zweier verschiedener Zahlen aus A = {4;9;12;7} treten genau die Zahlen aus B = {13;16;21;11;19} auf.

Mit I. und II. ist bewiesen, daß genau die beiden Tripel

$(a;b;c) = (17;26;19)$ und $(a;b;c) = (7;11;19)$

alle Bedingungen (1) bis (5) erfüllen.

260924) Lösung: 11 Punkte

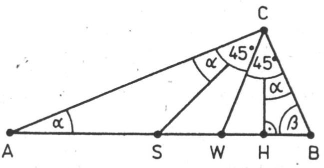

Abb. L 260924

I. Wenn ein Dreieck die Forderungen der Aufgabenstellung erfüllt, so folgt:

Für die gesuchten Winkelgrößen $\alpha = \overline{\sphericalangle BAC}$, $\beta = \overline{\sphericalangle ABC}$ sowie für die Schnittpunkte S,W,H der Seite AB mit der in der Aufgabe genannten Seitenhalbierenden, Winkelhalbierenden bzw. Höhe gilt:

Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt C auf einem Halbkreis über AB. Da S der Mittelpunkt von AB ist, gilt also $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC}$. Daher ist das Dreieck ACS gleichschenklig mit den Basiswinkeln

$$\overline{\sphericalangle ACS} = \overline{\sphericalangle CAS} = \alpha . \qquad (1)$$

Aus $\overline{\sphericalangle HBC} = \beta$ und $\overline{\sphericalangle BHC} = 90^\circ = \overline{\sphericalangle BCA}$ folgt nach dem Innenwinkelsatz

$$\overline{\sphericalangle BCH} = \overline{\sphericalangle BAC} = \alpha . \qquad (2)$$

Für die Winkelhalbierende CW gilt

$$\overline{\sphericalangle ACW} = \overline{\sphericalangle BCW} = 45^\circ . \qquad (3)$$

Für α und β kann (gegebenenfalls durch Vertauschung von A und B) $\alpha \leqq \beta$ angesetzt werden, wegen $\alpha + \beta = 90^\circ$ (Innenwinkelsatz) besagt dies

$$\alpha \leqq 45^\circ . \qquad (4)$$

Damit folgt aus (1), (2), (3), (4), daß die beiden in (1), (2) genannten Winkel $\sphericalangle ACS$, $\sphericalangle BCH$ der Größe α jeweils genau einer der vier gleichgroßen Teilwinkel des rechten Winkels $\sphericalangle ACB$ sein müssen.

Daher kann die Forderung der Aufgabenstellung nur erfüllt sein, wenn

(entweder) $\alpha = 22{,}5^\circ;\ \beta = 67{,}5^\circ$ (5)

(oder, nach Vertauschung von A und B) $\alpha = 67{,}5^\circ;\ \beta = 22{,}5^\circ$ (6)

ist.

II. Wenn ein rechtwinkliges Dreieck ABC die Innenwinkelgrößen $\alpha = \overline{\sphericalangle BAC} = 22{,}5^\circ$, $\beta = \overline{\sphericalangle ABC} = 67{,}5^\circ$ aufweist, so folgt wie in I., daß $\overline{\sphericalangle ACS} = \overline{\sphericalangle CAS} = \alpha = 22{,}5^\circ$, $\overline{\sphericalangle BCH} = \overline{\sphericalangle BAC} = \alpha = 22{,}5^\circ$ und $\overline{\sphericalangle ACW} = \overline{\sphericalangle BCW} = 45^\circ = 2\alpha$ gilt. Also ist die Forderung, den rechten Winkel in vier gleichgroße Winkel zu zerlegen, erfüllt.

Für Dreiecke ABC mit $\alpha = 67{,}5^\circ$, $\beta = 22{,}5^\circ$ beweist man dies ebenso (mit vertauschten A, B).

Mit II. ist bewiesen: Es gibt ein Dreieck ABC, das die Forderung der Aufgabenstellung erfüllt; damit folgt aus I.: Alle Dreiecke, für die das zutrifft, sind einander ähnlich; sie haben die in (5) bzw. (6) genannten Winkelgrößen.

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Es kann auch als Angabe zur erfragten Ähnlichkeitsaussage akzeptiert werden, daß genau zwei einander nicht ähnliche Dreiecke ABC und A'B'C' existieren (mit den in (5) genannten Winkelgrößen für das eine, in (6) für das andere Dreieck); wenn nämlich die Ähnlichkeit ABC $\sim$ A'B'C' mit der Zusatzforderung verstanden wird, daß jeweils A,A' und B,B' und C,C' entsprechende (homologe) Ecken sein sollen.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 9 Gesamtpunktzahl: 40

260921

Nachweis der Äquivalenz zu $(n-2)^2$	6 Punkte
Schlußfolgerung	2 Punkte
	8 Punkte

260922

Teil a)	6 Punkte
Teil b)	4 Punkte
	10 Punkte

260923

Erfassen der Aufgabenstellung	1 Punkt
Angabe der Lösungstripel	2 Punkte
Nachweis, daß jedes der Tripel die Bedingungen (1) bis (5) erfüllt ("Probe")	2 Punkte
Nachweis, daß keine anderen Tripel Lösung sind (Ableitung notwendiger Bedingungen)	6 Punkte
	11 Punkte

260924

Ableitung der notwendigen Bedingung $\alpha = 22,5^\circ$ und $\beta = 67,5^\circ$ (bzw. $\alpha = 67,5^\circ$, $\beta = 22,5^\circ$)	6 Punkte
Nachweis der Existenz eines Dreiecks	3 Punkte
Nachweis der Ähnlichkeit	2 Punkte
	11 Punkte