XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

260831) 1. Lösungsweg: 6 Punkte

(I) Wenn die Aussagen des Pionierleiters bei einem Vorrat von x Losen zutreffen, so kann jedes der Mädchen so viele Lose kaufen, wie die folgende Tabelle angibt. Ferner ist dort angegeben, wie viele Lose dann jeweils noch vorhanden sind.

	Anzahl der Lose, die das Mädchen kaufen kann	Anzahl der Lose, die danach noch vorhanden sind
1.Mädchen	$\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$	$x - (\frac{x}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$
2.Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$	$(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}) - (\frac{x}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$
3.Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{4} - \frac{3}{4}) + \frac{1}{2} = \frac{x}{8} + \frac{1}{8}$	$(\frac{x}{4} - \frac{3}{4}) - (\frac{x}{8} + \frac{1}{8}) = \frac{x}{8} - \frac{7}{8}$
4.Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{8} - \frac{7}{8}) + \frac{1}{2} = \frac{x}{16} + \frac{1}{16}$	$(\frac{x}{8} - \frac{7}{8}) - (\frac{x}{16} + \frac{1}{16}) = \frac{x}{16} - \frac{15}{16}$
5.Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{16} - \frac{15}{16}) + \frac{1}{2} = \frac{x}{32} + \frac{1}{32}$	

Da das 5. Mädchen alle noch vorhandenen Lose gekauft hat, gilt

$$\frac{x}{32} + \frac{1}{32} = \frac{x}{16} - \frac{15}{16},$$

also $\quad x + 1 = 2x - 30$

und daher $\quad x = 31.$

Als Vorrat an Losen kann daher höchstens die Zahl $x = 31$ die Eigenschaft haben, daß die Aussagen des Pionierleiters zutreffen.

(II) Für diese Anzahl als Vorrat gilt in der Tat:

Das 1. Mädchen kann $\frac{31}{2} + \frac{1}{2} = 16$ Lose kaufen. Von den dann vorhandenen 15 Losen kann das 2. Mädchen $\frac{15}{2} + \frac{1}{2} = 8$ Lose kaufen. Von den dann vorhandenen 7 Losen kann das 3. Mädchen $\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$Lose kaufen. Von den dann vorhandenen 3 Losen kann das 4. Mädchen $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ Lose kaufen. Von dem dann vorhandenen 1 Los kann das 5. Mädchen $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ Los kaufen, und danach bleibt kein Los übrig. Für den Vorrat von 31 Losen treffen somit die Aussagen des Pionierleiters zu; die einzelnen Mädchen können nach diesen Aussagen der Reihe nach 16, 8, 4, 2, 1 Lose kaufen.

2. Lösungsweg:

(1) Wenn die Aussagen des Pionierleiters zutreffen, so folgt: Nachdem die ersten vier Mädchen gekauft haben, wie angegeben, kann das 5. Mädchen die Hälfte der noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kaufen, und danach bleibt kein Los übrig. Also war das eben genannte halbe Los die andere Hälfte der noch vorhandenen Lose; d. h., die Anzahl der noch vorhandenen Lose hatte 1 betragen.

Also bleibt, wenn das 4. Mädchen die Hälfte der noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kauft, danach noch genau dieses eine Los übrig. Somit war dieses Los und das halbe Los zusammen die andere Hälfte der zuvor noch vorhandenen Lose; d. h., die Anzahl der noch vorhandenen Lose hatte 3 betragen.

Entsprechend schließt man: Für das 3. Mädchen hatte die Hälfte der Anzahl der zuvor noch vorhandenen Lose $3\frac{1}{2}$, diese Anzahl selbst also 7 betragen; für das 2. Mädchen hatte die Hälfte der Anzahl der zuvor noch vorhandenen Lose $7\frac{1}{2}$, diese Anzahl selbst also 15 betragen;

die Hälfte der Anzahl der ganz zu Beginn vorhandenen Lose hatte $15\frac{1}{2}$, diese Anzahl selbst also 31 betragen.

(II) wie im 1. Lösungsweg.

260832) Lösung: 7 Punkte

I. Wenn ein Paar (p;q) von Primzahlen zusammen mit einer natürlichen Zahl n die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:

Nach (2) gilt $p + q = n^2$, nach (3) gilt $n + p + q = 42$, wegen der vorigen Gleichung also $n + n^2 = 42$, d. h.

$$n(n + 1) = 42. \qquad (4)$$

L 8;I

Die einzigen Möglichkeiten, 42 als Produkt zweier natürlicher Zahlen darzustellen, sind (bis auf die Reihenfolge der Faktoren)

$$42 = 1 \cdot 42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7.$$

Von diesen Darstellungen enthält nur $6 \cdot 7$ zwei Faktoren der Gestalt n und $n + 1$; d. h., aus (4) (für natürliche Zahlen n) folgt

$$n = 6.$$

Nach (2) gilt somit $p + q = 36$. Also ist p eine der Primzahlen kleiner als 36, d. h. eine der Zahlen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,

und q ist jeweils die entsprechende der Zahlen

34, 33, 31, 29, 25, 23, 19, 17, 13, 7, 5.

Von diesen Möglichkeiten scheiden alle außer

$$p = 17, \quad q = 19$$

aus, da für sie entweder $q - p \geqq 10$ oder $q - p < 0$ wird, also (1) nicht erfüllt ist (einige auch deswegen, weil bei ihnen q keine Primzahl ist).

Also kann nur das Paar $(p;q) = (17\ ;\ 19)$ alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

II. Es erfüllt diese Bedingungen; denn 17 und 19 sind Primzahlen, es gilt $0 < 19 - 17 < 10$, $17 + 19 = 36 = 6^2$ und $6 + 17 + 19 = 42$. Also erfüllt genau das Paar $(17\ ;\ 19)$ die Bedingungen der Aufgabe.

Andere Möglichkeiten, von (4) auf $n = 6$ zu schließen:

1.: Für alle natürlichen Zahlen $n < 6$ ist $n(n + 1) < 6 \cdot 7$, für $n > 6$ ist $n(n + 1) > 6 \cdot 7$. Also kann unter den natürlichen Zahlen n nur $n = 6$ die Gleichung $n(n + 1) = 42$ erfüllen.

2.: Bei Kenntnis der Lösungsformel quadratischer Gleichungen (oder nach Herleitung, etwa vermittels $(n + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 42$) erhält man: Von den beiden Lösungen

$$n_{1;2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 42} = \frac{1}{2}(-1 \pm 13)$$

der quadratischen Gleichung $n^2 + n - 42 = 0$ ist nur $n_1 = 6$ eine natürliche Zahl.

260833) Lösung: 7 Punkte

Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiert ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge r.

(2) Man konstruiert den Kreis c um M mit dem Radius $\overline{AC}$. Die Schnittpunkte P_1, P_2, die c mit g hat[1], sind dann alle zu konstruierenden Punkte P.

Konstruktionszeichnung: Abb. L 260833 a.

Beweis zu (I): Es sei P ein Punkt, der (a) und (b) erfüllt; die Berührungspunkte der von P an k gelegten Tangenten seien T_1 und T_2 (Abb. L 260833 b).

Nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius gilt dann

$$\overline{\sphericalangle MT_1P} = 90^\circ, \qquad \overline{\sphericalangle MT_2P} = 90^\circ,$$

nach (b) gilt $\overline{\sphericalangle T_1PT_2} = 90^\circ$.

Also ist MT_1PT_2 ein Rechteck. Wegen

$$\overline{MT_1} = \overline{MT_2} = r$$

ist dieses Rechteck ein Quadrat mit der Seitenlänge r und folglich kongruent zu dem in (1) konstruierten Quadrat ABCD. Daraus folgt

$$\overline{MP} = \overline{AC};$$

also liegt P auf dem in (2) konstruierten Kreis c.

Wegen (a) liegt P auch auf g.

Also ist P einer der in (2) erhaltenen Schnittpunkte P_1, P_2, w.z.b.w.

Beweis zu (II): Es sei P ein Punkt, der nach der angegebenen Beschreibung konstruiert ist.

Nach (2) liegt dann P auf g, erfüllt also die Bedingung (a).

Nach (2) gilt ferner

$$\overline{AC} = \overline{MP}.$$

Da g größeren Abstand als r zu M hat und somit k meidet, gibt es zwei von P an k gelegte Tangenten. Sind T_1 und T_2 ihre Berührungspunkte, so folgt: Nach (1) gilt

$$\overline{AB} = \overline{MT_1};$$

---

1 Die Existenz (und Anzahl 2) dieser Schnittpunkte kann aus $\overline{AC} = r\sqrt{2} > d$ (nämlich aus $5 \cdot \sqrt{2} > 6$) geschlossen oder der durchgeführten Konstruktion entnommen werden.

nach (1) und dem Satz über Tangente und Berührungsradius gilt

$$\overline{\sphericalangle\, ABC} = \overline{\sphericalangle\, MT_1P},$$

zugleich sind die hier genannten Winkel als rechte Winkel die größten Innenwinkel in $\triangle ABC$ bzw. $\triangle MT_1P$. Nach dem Kongruenzsatz sSW ergibt sich damit

$$\triangle ABC \cong \triangle MT_1P.$$

Ebenso folgt

$$\triangle ADC \cong \triangle MT_2P.$$

Also sind die Vierecke $ABCD$ und MT_1PT_2 zueinander kongruent.

Da nach (1) nun $\overline{\sphericalangle\, BCD} = 90^\circ$ ist, gilt auch

$$\overline{\sphericalangle\, T_1PT_2} = 90^\circ;$$

d. h., auch (b) ist erfüllt, w.z.b.w.

Hinweis: Hat man im Konstruktionsschritt (1) $A = M$ gewählt (s. Abb. L 260833 a, b), so kann zum Beweis (II) auch ausgeführt werden, daß es nach (2) eine Drehung um M gibt, die C in P überführt. Bei dieser Drehung gehen die tangentialen Strecken CB, CD in tangentiale Strecken PT_1, PT_2 über; und ihr rechter Winkel bleibt erhalten.

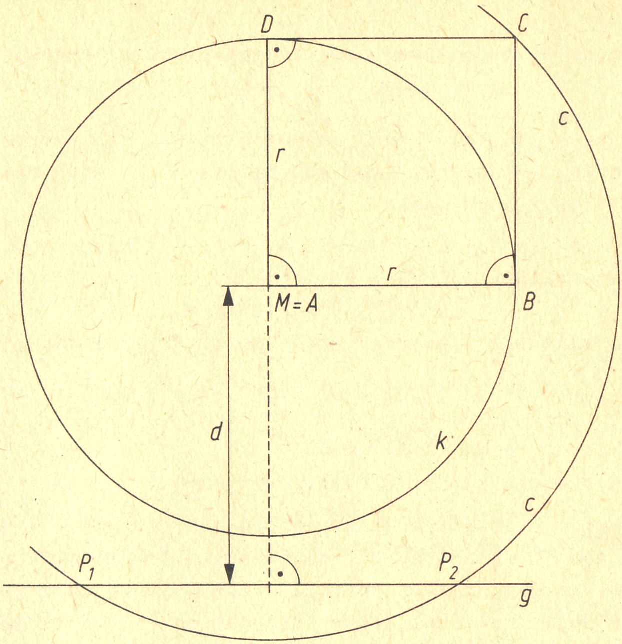

Abb. L 260833 a

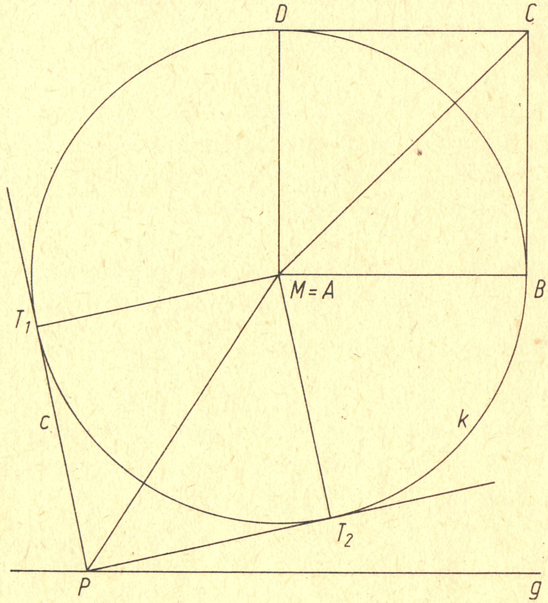

Abb. L 260833 b

L 8;II

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

260834) Lösung: 7 Punkte

Die drei in (2) genannten Punkte, die auf der in (1) genannten Geraden liegen, seien P_{98}, P_{99}, P_{100}, die übrigen der 100 Punkte seien P_1, P_2, ..., P_{97} genannt.

Eine Gerade geht genau dann durch mehr als einen der 100 Punkte, wenn sie

(a) entweder ein Paar verschiedener der Punkte P_1, P_2, ..., P_{97} miteinander verbindet

(b) oder einen der Punkte P_1, P_2, ..., P_{97} mit einem der Punkte P_{98}, P_{99}, P_{100} verbindet

(c) oder die Gerade durch P_{98}, P_{99}, P_{100} ist.

Jede in (a) genannte Gerade ist von jeder in (b) genannten Geraden verschieden[1]. Ferner gilt: Jede in (a) genannte Gerade und jede in (b) genannte Gerade ist von der in (c) genannten Geraden verschieden[2].

1. Fortsetzungsmöglichkeit:

Die Anzahl der in (a) genannten Geraden läßt sich folgendermaßen ermitteln: Man kann jeden der 97 Punkte P_1, P_2, ..., P_{97} mit jedem der 96 anderen unter diesen Punkten durch eine Gerade verbinden.

---

1 Beweis: Wäre die Gerade, die P_i mit P_j verbindet (i, j zwei verschiedene Zahlen 1,2,...,97), zugleich auch die Gerade, die P_k mit P_m verbindet (k eine der Zahlen 1,2,...,97; m eine der Zahlen 98, 99, 100), so lägen auf dieser Geraden die drei verschiedenen Punkte P_i, P_j und P_m, sie wäre also die in (1) genannte Gerade, und damit lägen auf ihr P_i, P_{98}, P_{99}, P_{100} im Widerspruch zu (2).

2 Beweis: Andernfalls enthielte die Gerade durch P_{98}, P_{99}, P_{100} noch einen der Punkte P_1, ..., P_{97}, was (2) widerspricht.

wenn von Verschiedenheit nichts geschrieben

Gesamt: nur 6

Hinweis: Sowohl für die oben dargestellten als auch für andere Lösungswege gilt: Die im Lösungsgang benötigten Verschiedenheitsfeststellungen sind anzugeben (ihr Fehlen in einer Schülerlösung beeinträchtigt deren Bewertung als vollständige Lösung). Eine Beweisformulierung wie in den Fußnoten ist dagegen nicht in dieser Ausführlichkeit zu fordern.

→ wenn Gerade g_1 vergessen: (−2)

Dabei hat man jede in (a) genannte Gerade genau zweimal erfaßt.
Also beträgt deren Anzahl

$$\frac{97 \cdot 96}{2} = 97 \cdot 48.$$

Die Anzahl der in (b) genannten Geraden beträgt $97 \cdot 3$.
Also ist die gesuchte Anzahl $97 \cdot 48 + 97 \cdot 3 + 1 = 4948$.

3 bei richtigem Ergebnis

2. Fortsetzungsmöglichkeit:

Man kann jeden der 100 Punkte mit jedem der 99 anderen durch eine Gerade verbinden. Dabei hat man jede in (a) genannte Gerade sowie jede in (b) genannte Gerade genau zweimal erfaßt, die in (c) genannte Gerade dagegen genau sechsmal (nämlich als Verbindungsgerade von P_{98}, P_{99}, von P_{98}, P_{100}, von P_{99}, P_{98}, von P_{99}, P_{100}, von P_{100}, P_{98} und von P_{100}, P_{99}).

Mit der Anzahl $\frac{100 \cdot 99}{2} = 50 \cdot 99$ ist somit jede in (a) genannte und jede in (b) genannte Gerade genau einmal erfaßt, die in (c) genannte Gerade dagegen genau dreimal.

Also ist die gesuchte Anzahl $50 \cdot 99 - 2 = 4948$.

Hinweis: Man kann auch eine schrittweise Überlegung durchführen: Für 3 Punkte, die (1) und (2) (mit der Anzahl 3 statt 100) erfüllen, gibt es genau eine gesuchte Gerade. Jeder Punkt, der dann noch so hinzugefügt wird, daß (1) und (2) (mit der jeweils neuen Anzahl n der Punkte) erfüllt bleiben, erbringt genau n − 1 neue Geraden hinzu. So kommt man auf die gesuchte Anzahl

$1 + 3 + 4 + \ldots + 98 + 99 = 1 + (3 + 99) + (4 + 98) + \ldots$
$+ (50 + 52) + 51 = 1 + 48 \cdot 102 + 51 = 4948$.

260835) Lösung: 7 Punkte

(I) Wenn $\overline{AC} = \overline{BC}$ (1)

gilt und CD die Seitenhalbierende von AB ist, d. h. D (auf AB liegt und) $\overline{AD} = \overline{BD}$ (2)

erfüllt, so folgt aus (1), (2) und

$\overline{CD} = \overline{CD}$ (3)

nach dem Kongruenzsatz sss, daß $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ und damit $\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle BCD}$ gilt. Also ist CD auch die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$, w.z.b.w.

(Man kann auch CD als Winkelhalbierende voraussetzen und dann aus $\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle BCD}$, (1), (3) mit dem Kongruenzsatz sws auf (2) schließen.)

(II) In einem Dreieck ABC sei die Strecke CD (mit D auf AB) sowohl Seitenhalbierende als auch Winkelhalbierende; d. h., es werde

$$\overline{AD} = \overline{BD} \tag{4}$$

und

$$\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle BCD} \tag{5}$$

vorausgesetzt.

Es sei E derjenige Punkt, für den D der Mittelpunkt von CE ist (Abb. L 260835 a). Dann halbieren in dem Viereck AEBC die Diagonalen einander gegenseitig, also[1] ist es ein Parallelogramm. Daher gilt

$$\overline{AC} = \overline{BE} \tag{6}$$

und

$$\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle BED} \tag{7}$$

(Wechselwinkel an den geschnittenen Parallelen AC, BE).

Aus (5) und (7) folgt $\overline{\sphericalangle BCD} = \overline{\sphericalangle BED}$ und daraus nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes

$$\overline{BC} = \overline{BE}. \tag{8}$$

Aus (6) und (8) folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$, w.z.b.w.

<u>Andere Fortsetzungsmöglichkeit</u> nach (5):

Es sei B' derjenige Punkt auf dem Strahl aus C durch A, für den

$$\overline{B'C} = \overline{BC}$$

gilt. Aus (5), (9) und

$$\overline{CD} = \overline{CD} \tag{10}$$

folgt dann nach dem Kongruenzsatz sws, daß $\triangle B'CD \cong \triangle BCD$ und damit

$$\begin{aligned} \overline{\sphericalangle DB'C} &= \overline{\sphericalangle DBC} \\ &= \overline{\sphericalangle ABC} \end{aligned} \tag{11}$$

und

$$\overline{B'D} = \overline{BD}, \tag{12}$$

nach (4) also

$$\overline{B'D} = \overline{AD} \tag{13}$$

gilt.

Wäre nun $B' \neq A$ (Abb. L 260835 b oder c), so wäre AB'D nach (13) ein gleichschenkliges Dreieck, einer der beiden Winkel $\sphericalangle DB'C$ und ($\sphericalangle BAC =$) $\sphericalangle DAC$ wäre ein Basiswinkel dieses gleichschenkligen Dreiecks, der andere der beiden Winkel $\sphericalangle DB'C$, $\sphericalangle BAC$ wäre ein

---

1 Dieser Schluß kann als bekannter Sachverhalt zitiert oder aus $\overline{AD} = \overline{BD}$, $\overline{CD} = \overline{ED}$, $\overline{\sphericalangle ADC} = \overline{\sphericalangle BDE}$ (Scheitelwinkel) über den Kongruenzsatz sws erhalten werden.

Nebenwinkel des zweiten Basiswinkels. Daher ergäbe sich $\overline{\sphericalangle DB'C} + \overline{\sphericalangle BAC} = 180^\circ$, nach (11) also $\overline{\sphericalangle ABC} + \overline{\sphericalangle BAC} = 180^\circ$, im Widerspruch zum Innenwinkelsatz für Dreieck ABC.
Also muß $B' = A$ und nach (9) somit $\overline{AC} = \overline{BC}$ gelten, w.z.b.w.

Weitere Hinweise:
Die Anwendung des Kongruenzsatzes sSW auf (4), (5), (10) ist nicht möglich, da auch $\overline{AD} < \overline{CD}$ sein kann.
Möglich ist dagegen die Anwendung der folgenden Variante dieses Kongruenzsatzes: "Gilt für zwei Dreiecke ABC, A'B'C' (mit den üblichen Bezeichnungen) $a = a'$, $b = b'$, $\alpha = \alpha'$ und $\beta + \beta' \neq 180^\circ$ so folgt (auch ohne die Voraussetzung $a > b$), daß die Dreiecke kongruent sind."
Unter Verwendung dieses Sachverhaltes folgt aus (4), (5), (10) und $\overline{\sphericalangle DAC} + \overline{\sphericalangle DBC} \neq 180^\circ$ (Innenwinkelsatz für Dreieck ABC) sofort $\triangle ADC \cong \triangle BDC$. (In die obige Fortsetzungsmöglichkeit (9), (10), ... ist stattdessen ein Beweis dieser Kongruenzsatz-Variante eingebaut.)

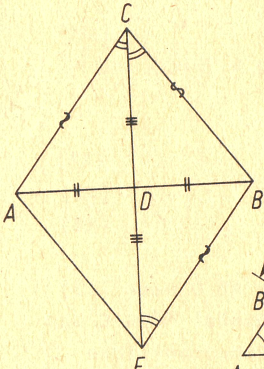

Abb. L 260835 a

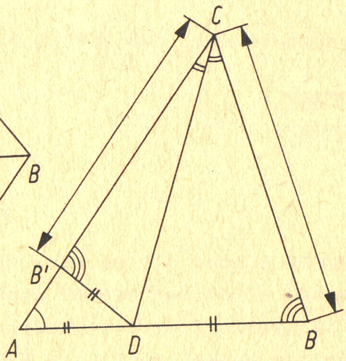

Abb. L 260835 b

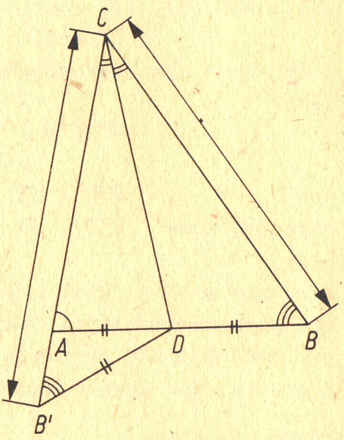

Abb. L 260835 c

<u>260836)Lösung</u>: <u>6 Punkte</u>

Wegen der Umfangsgleichheit von ABC und ABD gilt

$a + b + c = p + q + c,$ (1)

Wegen der Umfangsgleichheit von ABC und ACD gilt

$a + b + c = p + b + r,$ (2)

Wegen der Umfangsgleichheit von ABC und BCD gilt

$a + b + c = a + q + r.$ (3)

Behauptung: Hieraus folgt: a,b,c sind eindeutig bestimmt und zwar gilt

$$a = p, \quad b = q, \quad c = r.$$

1. Beweismöglichkeit hierzu:

Aus (1) folgt $a+b = p+q,$ (4)

aus (3) und (2) folgt

$a+q+r = p+b+r$ und daraus $a+q = p+b.$ (5)

Addiert man (4) und (5),

so ergibt sich $2a+b+q = 2p+b+q$

und daraus $a = p$.

Setzt man dies in (1) bzw. in (2) ein, so ergibt sich

$b = q$ bzw. $c = r$.

2. Beweismöglichkeit:

Addition von (1), (2), (3) ergibt $3(a+b+c) = a+b+c + 2(p+q+r)$,

also $a+b+c = p+q+r.$ (6)

Aus (6) zusammen mit (1) bzw. mit (2) bzw. mit (3)

folgt $c = r$ bzw. $b = q$ bzw. $a = p$.

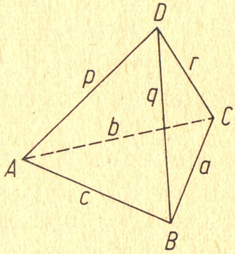

Abb. L 260836