Umlauft

L 7

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

260721) Lösung: 8 Punkte

In 30 Minuten pflückt Anne 3 Körbe, Bernd 2 Körbe und Peter einen Korb voll. Alle drei Kinder füllen also in dieser Zeit zusammen 6 Körbe. Demzufolge wird wegen $30 : 6 = 5$ ein gemeinsamer Korb in 5 Minuten gefüllt.

Anderer Lösungsweg: In 5 Minuten pflückt Anne $\frac{1}{2}$ Korb, Bernd $\frac{1}{3}$ Korb und Peter $\frac{1}{6}$ Korb (da 5 Minuten die Hälfte bzw. ein Drittel bzw. ein Sechstel der Pflückzeit Annes bzw. Bernds bzw. Peters für einen Korb sind). Wegen $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ füllen die Kinder also in 5 Minuten gemeinsam einen Korb.

260722) Lösung: 10 Punkte

Dorit sei im Jahre x zehn Jahre alt geworden. Dann ist $x-1$ eine natürliche Zahl, die durch 2, 3, 5 und 11 teilbar ist. Diese vier Teilbarkeitsaussagen gelten genau dann, wenn $x-1$ ein Vielfaches des k.g.V. dieser vier Zahlen ist. Das ist gleichbedeutend damit, daß mit einer natürlichen Zahl n

$$x - 1 = 330 \cdot n,$$

d. h. $$x = 330 \cdot n + 1$$ gilt.

Da 330 bei Division durch 7 den Rest 1, also $330 \cdot 2$ den Rest 2, $330 \cdot 3$ den Rest 3 usw. läßt, führt $n = 6$ auf die kleinste Zahl x, die (außer den genannten Teilbarkeitsaussagen für $x-1$) auch die Bedingung erfüllt, durch 7 teilbar zu sein.

Daraus folgt $x = 330 \cdot 6 + 1 = 1981$; d. h., aus Dorits Antwort läßt sich eindeutig ermitteln:

Dorit wurde im Mai des Jahres 1981 zehn Jahre alt; im Juni 1986 ist sie mithin 15 Jahre alt.

L 7

260723) Lösung: 10 Punkte

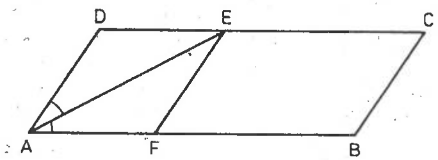

Abb. L 260723

Nach Voraussetzung ist $AB \parallel CD$ und $FE \parallel AD$, somit ist das Viereck AFED ein Parallelogramm mit $\overline{AF} = \overline{DE}$ und $\overline{AD} = \overline{EF}$.
Da der Winkel $\sphericalangle DAF$ durch AE halbiert wird, gilt $\overline{\sphericalangle DAE} = \overline{\sphericalangle EAF}$.
Außerdem sind die Winkel $\sphericalangle EAF$ und $\sphericalangle AED$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen und somit gleichgroß.
Damit gilt $\overline{\sphericalangle DAE} = \overline{\sphericalangle EAF} = \overline{\sphericalangle AED}$, und das Dreieck AED ist nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes gleichschenklig mit $\overline{AD} = \overline{DE}$.
Also ist $\overline{AF} = \overline{DE} = \overline{AD} = \overline{EF}$, d. h., das Parallelogramm AFED hat vier gleichlange Seiten und ist damit ein Rhombus.

260724) Lösung: Punkte

(a)

I. Konstruktion: Abbildung L 260724a

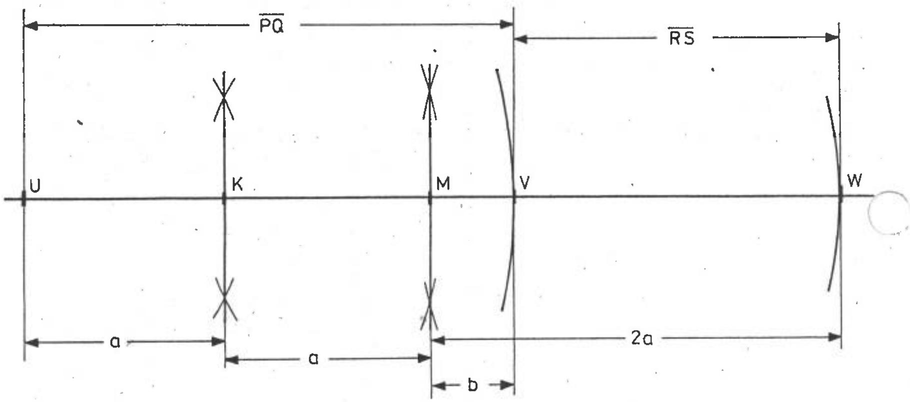

Abb. L 260724

II. Beschreibung:

1. Man konstruiert eine Strecke UV der Länge $\overline{UV} = \overline{PQ}$.
2. Man verlängert UV über V hinaus um $\overline{RS}$ bis zum Punkt W.
3. Man konstruiert den Mittelpunkt M der Strecke UW.
4. Man konstruiert den Mittelpunkt K der Strecke UM.

Dann sind $\overline{UK} = a$ und $\overline{MV} = b$ die gesuchten Längen.

III. Begründung:

Für die so konstruierten Längen gilt: Nach 4. ist $\overline{UM} = 2 \cdot \overline{UK} = 2a$; hieraus und aus 1. folgt

$$\overline{PQ} = \overline{UV} = \overline{UM} + \overline{MV} = 2a + b,$$

d. h., (1) ist erfüllt. Nach 3. ist ferner $\overline{MW} = \overline{UM} = 2a$; hieraus und aus 2. folgt

$$\overline{RS} = \overline{VW} = \overline{MW} - \overline{MV} = 2a - b,$$

d. h., (2) ist erfüllt.

(b) Aus (1) und (2), d. h. $2a + b = 9{,}8$ cm (3)

und $2a - b = 6{,}6$ cm, (4)

folgt durch Addition $4a = 16{,}4$ cm,

also $a = 4{,}1$ cm.

Hieraus und aus (3) folgt $b = 9{,}8 \text{ cm} - 8{,}2 \text{ cm} = 1{,}6$ cm.

<u>Andere Lösungsmöglichkeiten:</u>

Zu (a)III.:

Statt der angeführten Schlußweise ("Wenn a und b wie in II. konstruiert werden, dann erfüllen sie (1) und (2)") kann auch umgekehrt geschlossen werden: Wenn a und b die Bedingungen (1) und (2) erfüllen, ist ihre Summe gleich 4a, also führen dann die Konstruktionsschritte II.1., 2. auf $\overline{UW} = 4a$. Daher führt das zweimalige Halbieren II.3., 4. auf $\overline{UM} = 2a$ und $\overline{UK} = a$, und wegen (1) ist ferner $\overline{UV} = 2a + b$, also $\overline{MV} = \overline{UV} - \overline{UM} = b$.

Zu (b):

Statt der angeführten Schlußweise ("Wenn a und b die Bedingungen (1) und (2) erfüllen, dann ist $a = 4{,}1$ cm und $b = 1{,}6$ cm") kann auch $a = 4{,}1$ cm und $b = 1{,}6$ cm (z. B. durch Messen in II. oder durch Probieren vermutet und) vorausgesetzt werden, und dann wird nachgewiesen, daß diese Längen (1) und (2) erfüllen, da für sie $2a + b = 2 \cdot (4{,}1)\text{ cm} + 1{,}6 \text{ cm} = 9{,}8$ cm und $2a - b = 2 \cdot 4{,}1 \text{ cm} - 1{,}6 \text{ cm} = 6{,}6$ cm gilt.

L 7

Zu (a) sind insgesamt auch andere Konstruktionen möglich, z. B. wie in Abbildung L 260724b. (Aus $\overline{EF} = \overline{PQ}$, $\overline{EG} = \overline{RS}$ konstruiert man X als Mittelpunkt von GF und Y als Mittelpunkt von EX; dann wird $\overline{EY} = \overline{YX} = a$, $\overline{GX} = \overline{XF} = b$.) Die Lösungsteile II. und III. (zwei mögliche Schlußweisen) sind dann entsprechend anzuschließen.

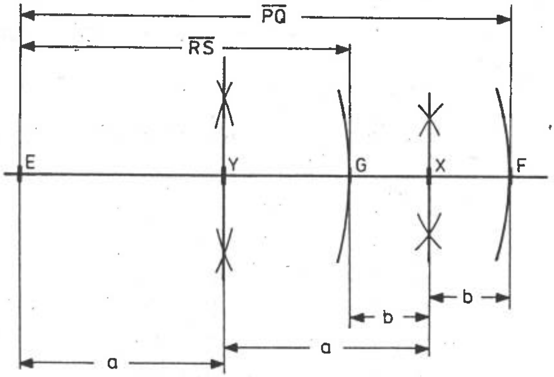

Abb. L 260724b

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 7 Gesamtpunktzahl: 40

260721

Angabe der richtigen Pflückzeit	2 Punkte
Vollständige und korrekte Herleitung	6 Punkte
	8 Punkte

260722

Schlußfolgerungen aus den gegebenen Teilbarkeitsaussagen (z. B. bis x = 330n + 1)	4 Punkte
Schlußfolgerungen aus der Bedingung, die kleinste derartige Zahl zu bestimmen (z. B. bis n = 6)	3 Punkte
Angabe von x = 1981 und des gesuchten Alters	3 Punkte
	10 Punkte

260723

Planfigur	1 Punkt
Angabe aller für den Beweis benötigten Feststellungen (Gleichheit von Strecken oder Winkeln)	5 Punkte
Angabe aller für die Ableitung dieser Feststellungen benötigten Begründungen (z. B. Wechselwinkelsatz usw.)	4 Punkte
	10 Punkte

260724

a) I. Konstruktionszeichnung	2 Punkte
II. Konstruktionsbeschreibung	2 Punkte
III. Begründung	3 Punkte
b) Korrekte rechnerische Ermittlung von a und b	5 Punkte
	12 Punkte