Umlauft

A 6

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 6

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>260621</u>

Bei der folgenden fünfstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt.

2 7 * * 7

Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, daß die Zahl durch 9 teilbar ist. Gib alle fünfstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können! Weise nach, daß alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

<u>260622</u>

Die Mädchen Britta, Petra und Anja wünschen sich einen Ball, eine Puppe und ein Album für Briefmarken. Dabei wünscht sich jedes der Mädchen genau einen der genannten Gegenstände, und zwar jedes Mädchen einen anderen.

Marie soll feststellen, wer von den Mädchen sich welchen Gegenstand wünscht. Auf ihre Frage erhält sie folgende Antworten:

(1) Britta wünscht sich den Ball.
(2) Petra wünscht sich den Ball nicht.
(3) Anja wünscht sich das Album nicht.

Von diesen drei Antworten ist genau eine wahr, die anderen beiden sind falsch.

Wenn man das weiß, kann man für jedes der drei Mädchen eindeutig feststellen, welchen Gegenstand es sich wünscht. Erkläre, wie sich diese Feststellungen gewinnen lassen, und gib die Feststellungen an!

Umlauft

A 6

260623

Es seien A,B,C die drei in Abbildung A 260623 gegebenen Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

a) Konstruiere (mindestens) zwei Punkte S_1 und S_2, für die $\overline{S_1A} = \overline{S_1B}$ und $\overline{S_2A} = \overline{S_2B}$ gilt!

b) Es gibt genau einen Punkt S, der von A, B und C gleich weit entfernt ist. Konstruiere diesen Punkt S!

c) Begründe, warum der Punkt S bei deiner Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt!

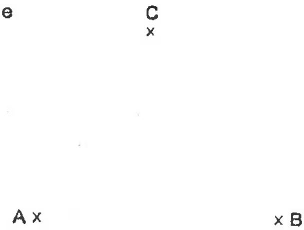

Abb. A 260623

260624

Der Schüler Frank Schludrig meint, über seine Klasse folgendes herausgefunden zu haben: In der Klasse sind genau 28 Schüler, davon sind genau 16 Jungen. An Arbeitsgemeinschaften nehmen genau 20 Schüler der Klasse teil, davon sind genau 8 Jungen. An der Kreisolympiade Junger Mathematiker beteiligten sich genau 4 Schüler der Klasse, davon waren genau 2 Jungen. Von diesen Olympiadeteilnehmern sind genau 1 Junge und genau 1 Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft.

Der Schüler Rolf Schlauberger hört sich diese Angaben an und behauptet nach einigem Überlegen, daß Frank Schludrig ein Irrtum unterlaufen sein muß.

Weise nach, daß die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen können!

kenlauft

L 6

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 6

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

260621) Lösung: 10 Punkte

Durch Einfügen zweier Ziffern anstelle der Sternchen entsteht genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn deren Quersumme durch 9 teilbar ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die Summe der zwei eingefügten Ziffern 2 oder 11 beträgt. Folglich ergibt sich genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn die beiden Sternchen in dieser Reihenfolge durch die Ziffern

0,2	bzw. 2,9
bzw. 1,1	bzw. 3,8
bzw. 2,0	bzw. 4,7
	bzw. 5,6
	bzw. 7,4
	bzw. 8,3
	bzw. 9,2

ersetzt werden.

Die gesuchten Zahlen lauten mithin
27027, 27117, 27207, 27297, 27387, 27477, 27567, 27657, 27747, 27837 und 27927.

260622) Lösung: 10 Punkte

Wir unterscheiden drei Fälle, je nachdem welche von den drei Antworten wahr ist:

1. Fall: Angenommen, die Antwort (1) wäre wahr, die Antworten (2) und (3) wären also falsch. Dieser Fall kann nicht eintreten, weil sich dann nämlich Britta und Petra beide den Ball wünschen würden.

2. Fall: Angenommen, die Antwort (2) wäre wahr und die Antworten (1) und (3) wären falsch. Dieser Fall kann nicht eintreten; denn dann würden sich weder Petra noch Britta den Ball wünschen, aber auch Anja nicht (da sie sich das Album wünschen würde.)

Also muß der folgende Fall zutreffen:

3. Fall: Die Antwort (3) ist wahr und die Antworten (1) und (2) sind falsch.

Daß (2) falsch ist, besagt:

Petra wünscht sich den Ball

(in Übereinstimmung damit, daß auch (1) falsch ist). Anja wünscht sich also nicht den Ball; und daß (3) wahr ist, bedeutet folglich nunmehr eindeutig:

Anja wünscht sich die Puppe,

Britta wünscht sich das Album

(letzteres ebenfalls in Übereinstimmung damit, daß (1) falsch ist).

<u>260623) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

a) Eine mögliche Konstruktion ist die folgende (siehe Abb. L 260623; eine Beschreibung wird vom Schüler nicht verlangt):
Wir zeichnen um A und um B je einen Kreis mit dem gleichen Radius r, der größer als $\frac{1}{2}\ \overline{AB}$ und sonst beliebig gewählt wird. Die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 dieser beiden Kreise erfüllen die Bedingung $\overline{S_1A} = \overline{S_1B}$ und $\overline{S_2A} = \overline{S_2B}$.

b) In entsprechender Weise konstruieren wir für die Punkte A und C zwei Punkte S_3 und S_4, für die $\overline{S_3A} = \overline{S_3C}$ und $\overline{S_4A} = \overline{S_4C}$ gilt. Der Schnittpunkt S der Geraden durch S_1, S_2 und der Geraden durch S_3, S_4 erfüllt die geforderten Bedingungen.

c) Nach Konstruktion ist die Gerade durch S_1, S_2 Symmetrieachse zu A, B, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von A wie von B entfernt sind.
Ferner ist die Gerade durch S_3, S_4 Symmetrieachse zu A, C, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von A wie von C entfernt sind. Nach Konstruktion ist S ein Punkt beider Symmetrieachsen. Deshalb gilt für ihn:

$$\overline{SA} = \overline{SB} \quad \text{und} \quad \overline{SA} = \overline{SC}$$

und damit auch $\overline{SB} = \overline{SC}$, d. h., S ist von A, B und C gleich weit entfernt.

Neuauflt

L 6

260624) Lösung: 10 Punkte

Aufgrund der Gesamtzahl der Mitglieder von Arbeitsgemeinschaften (20) und der Zahl der Jungen unter ihnen (8) und wegen 20 - 8 = 12 müßte es in der Klasse 12 Mädchen geben, die in Arbeitsgemeinschaften tätig sind.
Aufgrund der Gesamtzahl der Olympiadeteilnehmer (4) und der Zahl der Jungen unter ihnen (2) und wegen 4-2 = 2 müßte es in der Klasse genau 2 Mädchen geben, die an der Olympiade teilgenommen haben.
Es wird nun ausgesagt, daß genau eines dieser Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft ist. Also folgt aus den Angaben, daß es außer 12 Mädchen, die Mitglieder von Arbeitsgemeinschaften sind, noch ein weiteres Mädchen in der Klasse geben müßte. Da somit die Zahl der Mädchen in der Klasse mindestens 13 sein würde, die Zahl der Jungen mit 16 angegeben wird, 13 + 16 = 29 ist, die Klasse aber nur 28 Schüler umfassen soll, können die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen.

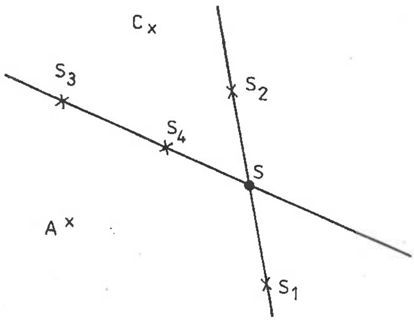

Abb. L 260623

Umlauft

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 6 Gesamtpunktzahl: 40

260621

Angeben der gesuchten Zahlen	6 Punkte
Nachweis	4 Punkte
(davon 2 Punkte für die Begründung, daß die Summe der einzufügenden Zahlen 2 oder 11 sein muß)	
	10 Punkte

260622

Richtige Zuordnung der Mädchen zu den Gegenständen	5 Punkte
Erörtern des 3. Falls	3 Punkte
Erörtern der beiden übrigen Fälle	2 Punkte
	10 Punkte

260623

a) Konstruktion	3 Punkte
b) Konstruktion	5 Punkte
c) Begründung	2 Punkte
	10 Punkte

260624

Feststellen, daß es nach den Angaben 13 Mädchen in der Klasse geben müßte	7 Punkte
Feststellen, daß in den Angaben die Gesamtzahl der Jungen und Mädchen nicht mit der angeführten Schülerzahl übereinstimmt	3 Punkte
(Für Mängel in den Begründungen sind bis zu 3 Punkte abzuziehen.)	
	10 Punkte