XXVI. Olympiade Junger Mathematiker

der Deutschen Demokratischen Republik
1. Stufe (Schulolympiade)

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen werden im Oktober 1986 veröffentlicht.

Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärkeren Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

Anmerkung: ∢ ABC bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels ∢ ABC. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

260511

Die Mädchen Grit, Regina und Beate tragen jede eine einfarbige Bluse. Von diesen drei Blusen ist eine gelb, eine rot und eine blau.

Grit stellt fest, daß keines der Mädchen eine Bluse von der Farbe trägt, die den gleichen Anfangsbuchstaben wie der Vorname des Mädchens hat. Das Mädchen mit der roten Bluse antwortet darauf: "Das hatte ich noch gar nicht bemerkt, aber du hast recht, Grit!"

Welche Bluse trägt jedes der Mädchen?

260512

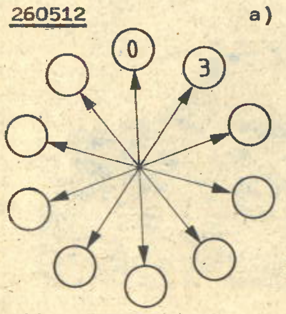


Abb. A 260512

a) Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen so in die kleinen Kreise der Abbildung A 260512 eingetragen werden, daß jedes Paar benachbarter Kreise dieselbe Summe wie das Paar an den beiden entgegengesetzten Pfeilspitzen ergibt.
Jede der zehn Zahlen soll genau einmal vorkommen. Die Zahlen 0 und 3 sollen wie angegeben eingetragen werden.
Gib eine Eintragung an, die alle diese Forderungen erfüllt!

b) Für die Zahlen 10,11,12,13,14,15,16,17,18,19 läßt sich eine entsprechende Aufgabe stellen. Wie kann man für sie auf einfache Weise eine Lösung aus der Lösung von a) gewinnen?

c) Löse die entsprechende Aufgabe für die natürlichen Zahlen n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5,n+6,n+7,n+8,n+9!

d) Begründe deine Lösung von c)!

260513

Jörg bewundert Holgers Kaninchen und Tauben. Er möchte gern wissen, wieviel Kaninchen und Tauben Holger besitzt, und fragt ihn deshalb danach. Dieser antwortet: "Ich habe insgesamt 24 Tiere, die zusammen 62 Beine haben. Andere Tiere als Kaninchen und Tauben habe ich nicht."

Wieviel Kaninchen und wieviel Tauben besitzt Holger?
Begründe deine Antworten!

260514

Der Pionier Klaus Knobler tritt als Zauberkünstler vor seiner Pioniergruppe auf. Nachdem ihm die Augen verbunden wurden, bittet er einen Zuschauer, aus einer Streichholzschachtel eine beliebige ungerade Anzahl von Hölzern, jedoch mindestens 13, zu entnehmen. Diese Hölzer sollen in zwei parallelen Reihen auf den Tisch gelegt werden, wobei die obere Reihe genau ein Streichholz mehr enthalten soll als die untere. Nachdem dies geschehen ist, läßt Klaus Knobler

(1) irgendeine von ihm selbst genannte Anzahl a (mindestens 1, jedoch weniger als 7) Streichhölzer aus der oberen Reihe fortnehmen, dann
(2) aus der unteren Reihe so viele Streichhölzer wegnehmen, wie oben noch liegen, und dann
(3) aus der oberen Reihe alle übrigen Streichhölzer entfernen.

Danach nennt Klaus Knobler den staunenden Zuschauern die Anzahl der auf dem Tisch verbliebenen Hölzer. Wie groß ist sie?
Durch welche Überlegung kann Klaus Knobler sie finden, ohne die Anzahl der zu Beginn auf dem Tisch liegenden Hölzer zu kennen?

Olympiadeklasse 6

260611

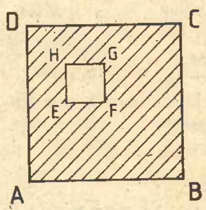


Abb. A 260611

In ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 8 cm ist ein Quadrat EFGH mit der Seitenlänge 2 cm so eingezeichnet, wie es das Bild zeigt.
HG und DC sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander. EH und AD sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander.

a) Berechne den Flächeninhalt der im Bild schraffierten Fläche!
b) Die schraffierte Fläche soll in fünf Teile zerlegt werden. Diese Teile sollen so gestaltet sein, daß man je zwei von ihnen durch Drehen oder Verschieben miteinander zur Deckung bringen kann. Zeichne eine solche Aufteilung der schraffierten Fläche!

260612

Zur Durchführung eines Geländespiels war es nötig, daß jeder Teilnehmer ein Schreibgerät bei sich hatte. Es waren nur folgende Sorten Schreibgeräte von Teilnehmern mitgebracht worden: Kugelschreiber, Rotstifte und Grünstifte; keine dieser drei Sorten kam doppelt bei einem der Teilnehmer vor. Im einzelnen wurde festgestellt:

(1) Es waren insgesamt 100 Teilnehmer bei diesem Geländespiel.
(2) Genau 20 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Rotstift.
(3) Genau 15 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Grünstift.
(4) Genau 5 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber weder einen Rotstift noch einen Grünstift.
(5) Genau 65 der Teilnehmer hatten keinen Kugelschreiber.
(6) Genau 55 der Teilnehmer hatten keinen Rotstift.
(7) Genau 40 der Teilnehmer hatten keinen Grünstift.
(8) Genau 15 der Teilnehmer hatten weder einen Rotstift noch einen Grünstift.

a) Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl derjenigen Teilnehmer, die wenigstens ein Schreibgerät mitgebracht hatten!
b) Reichten die mitgebrachten Schreibgeräte aus, um bei geeigneter Verteilung jeden der 100 Teilnehmer mit einem Schreibgerät zu versorgen?

Die Lösungen bringen wir in der TROMMEL-Ausgabe 38

260613
Die Verbindungsstraßen dreier Orte A,B,C bilden ein Dreieck. In der Mitte der Verbindungsstraße von B nach C liegt ein weiterer Ort D. Von A über B nach C beträgt die Entfernung 25 km, von B über C nach A dagegen 27 km und von C über A nach B schließlich 28 km. Eine Pioniergruppe wandert auf den genannten Straßen auf kürzestem Wege vom Ort A zum Ort D.
a) Über welchen der beiden Orte B oder C läuft die Pioniergruppe? Begründe deine Entscheidung!
b) Wieviel Zeit spart sie gegenüber dem längeren der beiden möglichen Wege von A nach D ein, wenn sie stündlich 4 km zurücklegt?
c) Wie lang ist der von ihr insgesamt zurückgelegte Weg?

260614
Auf einem Kreis werden wie beim Zifferblatt einer Uhr zwölf Punkte eingetragen. Auf jeden der Punkte wird genau ein Spielstein gelegt. Zwei Spieler A und B sollen abwechselnd jeweils entweder genau einen Stein oder genau zwei Steine, die auf benachbarten Punkten liegen, wegnehmen. Spieler A beginnt. Gewonnen hat der Spieler, der den letzten Spielstein wegnimmt.
Wie kann Spieler B vorgehen, um in jedem Fall zu gewinnen?

Olympiadeklasse 7

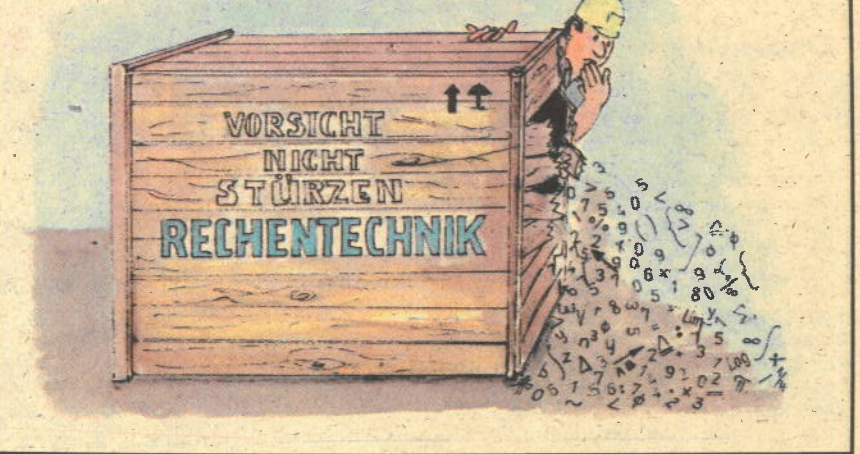
260711
Ermittle für jede der nachfolgenden Teilaufgaben (a) bis (e) jeweils alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die die angegebene Forderung erfüllen!
Forderung (a): Die Summe $(\frac{7}{12} + \frac{n}{12})$ ist ein echter Bruch.
Forderung (b): Die Summe $(\frac{7}{12} + \frac{n}{12})$ ist ein echter Bruch, der sich nicht mehr durch Kürzen vereinfachen läßt.
Forderung (c): Die Aufgabe, die Differenz $(\frac{7}{12} - \frac{n}{12})$ zu berechnen, ist im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar.
Forderung (d): Die Differenz $(\frac{7}{12} - \frac{n}{12})$ ist ein echter Bruch.
Forderung (e): Die Summe $(\frac{7}{12} + \frac{n}{12})$ ist eine natürliche Zahl.

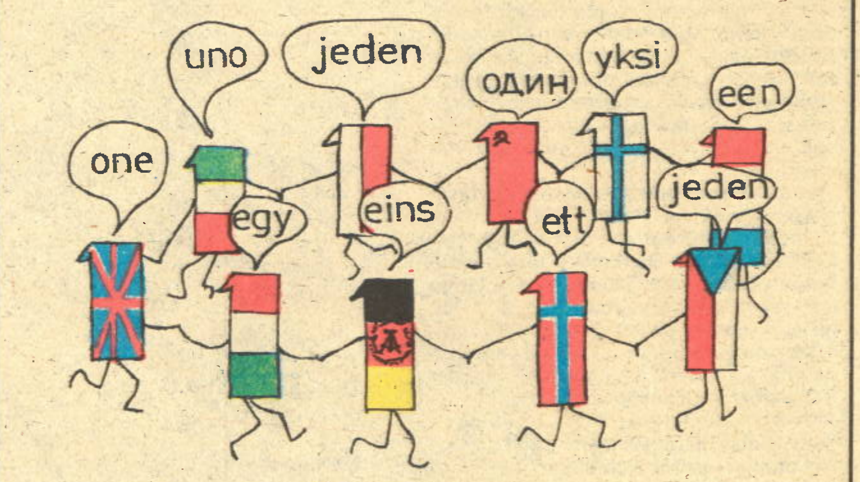
260712
In der Materialausgabe eines Betriebes sind durch ein Mißgeschick die Schlüssel von zwölf Vorhängeschlössern durcheinandergekommen. Da zu jedem Vorhängeschloß von den insgesamt zwölf Schlüsseln nur einer paßt und zu jedem Schlüssel nur eines der Vorhängeschlösser, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden, muß herausgefunden werden, welcher Schlüssel zu welchem Schloß gehört. Lehrling Bernd, der mit dieser Aufgabe betraut wurde, dachte: 'Jetzt muß ich zwölf Schlüssel an zwölf Schlössern ausprobieren, muß also, wenn ich Pech habe, 12 · 12 = 144 Proben ausführen.' Sein Freund Uwe meinte jedoch, daß man mit viel weniger Proben auskommt.
Ermittle die kleinste Anzahl von Proben, mit der man mit Sicherheit (d. h. auch noch im ungünstigsten Fall) zu jedem Vorhängeschloß den passenden Schlüssel findet!

260713
Für die Klassen 2, 3 und 4 einer Schule steht ein Schulgarten mit einem Flächeninhalt von genau 800 Quadratmetern zur Verfügung. Ein Viertel dieser Fläche wird für einen Spielplatz und für das Anlegen von Wegen vorgesehen, die übrige Fläche soll zur Bearbeitung auf die drei Klassen aufgeteilt werden. Da den einzelnen Klassen unterschiedlich viele Schüler angehören, nämlich der 2. Klasse 25 Schüler, der 3. Klasse 20 Schüler und der 4. Klasse 30 Schüler, wird vereinbart, daß jedem Schüler der genannten Klassen eine gleich große Fläche zur Bearbeitung zugewiesen wird.
Wieviel Quadratmeter Gartenland hat demnach jede der drei Klassen zu bearbeiten?

260714
Ein junger Mathematiker zeichnet ein Rechteck und halbiert die Seiten. Er vermutet, daß die vier Seitenmittelpunkte Eckpunkte eines Rhombus sind.
Untersuche, ob diese Vermutung für jedes Rechteck wahr ist!

Franz Fricke





Mathematischer Tanz