XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 5

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

260521) Lösung: 10 Punkte

Aus (2) und (4) folgt, daß Kerstin nicht aus Dresden, aber auch nicht aus Schwerin sein kann. Wegen (1) und (2) ist Kerstin auch nicht aus Berlin, also folgt:

(5) Kerstin kommt aus Halle.

Aus (1) und (2) folgt, daß Andreas nicht aus Berlin, aber auch nicht aus Dresden kommt. Daraus und wegen (5) folgt:

(6) Andreas kommt aus Schwerin.

Aus (3), (5) und (6) ergibt sich:

(7) Dirk kommt aus Dresden.

Weiter folgt:

(8) Britta kommt aus Berlin.

Aus (1) und (8) ergibt sich:

Andreas und Britta nahmen schon im Vorjahr an der DDR-Olympiade teil.

Hinweis zur Korrektur: Auch bei anderen Lösungsmöglichkeiten (z. B. mit Hilfe einer Tabelle) ist nur dann die volle Punktzahl zu erteilen, wenn aus der Lösungsdarstellung ersichtlich ist, wie geschlußfolgert wurde. Andernsfalls sind anteilige Punkte in angemessenem Umfang zu vergeben.

260522) Lösung: Punkte

a) Es gibt genau sechs derartige Anordnungen für die drei roten Spielmarken, und zwar:

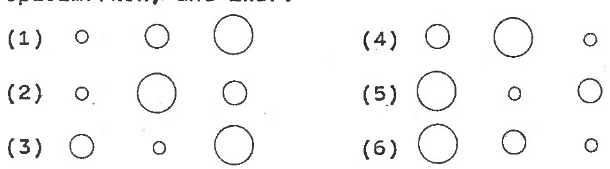

Abb. L 260522

b) Ebenso wie für die drei roten Spielmarken gibt es genau sechs Anordnungsmöglichkeiten für die drei blauen Spielmarken. Da die Farben sich abwechseln sollen und sich jede Anordnung der roten Spielmarken mit jeder Anordnung der blauen Spielmarken zu einer neuen Reihe vereinigen läßt, gibt es wegen $6 \cdot 6 = 36$ insgesamt 36 Anordnungen, die mit einer roten Spielmarke beginnen, und ebensoviele Anordnungen, die mit einer blauen Spielmarke beginnen. Folglich gibt es insgesamt 72 unterschiedliche Anordnungen der geforderten Art für die drei roten und die drei blauen Spielmarken.

<u>260523) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Aus der Forderung $4 \cdot \overline{AC} = \overline{AD}$ folgt, daß C auf dem genannten Strahl näher bei A liegen muß als D. Wegen der Forderung $\overline{CB} = \overline{BD}$ muß B der Mittelpunkt der Strecke CD sein.

Verlängert man AD über D hinaus nochmals um die Länge $\overline{AC}$ bis zu einem Punkt E, so ist folglich B auch der Mittelpunkt der Strecke AE. Wegen $\overline{AB} = 15$ cm ergibt sich somit $\overline{AE} = 30$ cm. Andererseits folgt

$$\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = 4 \cdot \overline{AC} + \overline{AC} = 5 \cdot \overline{AC}.$$

Wegen $30 : 5 = 6$ und $4 \cdot 6 = 24$ muß daher

$$\overline{AC} = 6 \text{ cm und } \overline{AD} = 24 \text{ cm}$$

gewählt werden.

Abbildung L 260523 zeigt die verlangte Zeichnung (aus technischen Gründen in verkleinertem Maßstab; das Einzeichnen von E und von Maßpfeilen wird nicht vom Schüler verlangt).

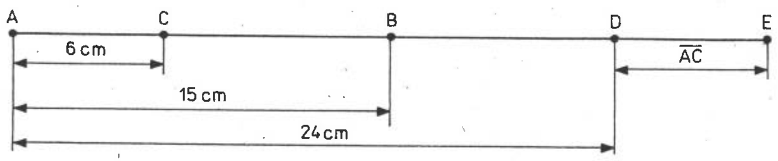

Abb. L 260523

<u>Anderer Lösungsweg:</u> Wie oben erhält man, daß C näher bei A liegt als D und daß B der Mittelpunkt der Strecke CD ist. Daher ist $\overline{AC}$ eine Länge, die kleiner als $\overline{AB}$ ist. Durch probeweises Berechnen von $\overline{AD}$ zu verschiedenen Möglichkeiten für $\overline{AC}$ (Erfüllung der Forderung $\overline{CB} = \overline{BD}$) erhält man, daß auch die Forderung $4 \cdot \overline{AC} = \overline{AD}$

erfüllt wird, wenn man $\overline{AC} = 6$ cm wählt (siehe die folgende Tabelle). Zeichnung wie in Abbildung L 260523 (ohne E).

$\overline{AC}$	Abstand von C bis B, also auch Verlängerung von AB bis D	$\overline{AD}$	
. . . 4 cm 5 cm	. . . 11 cm 10 cm	. . . 26 cm 25 cm	
6 cm	9 cm	24 cm	$4 \cdot 6 = 24$ erfüllt
7 cm . . .	8 cm . . .	24 cm . . .	

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Der 1. Lösungsweg verzichtet auf die Probe (den Schluß, daß mit $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{AD} = 24$ cm die Forderungen der Aufgabe erfüllt werden), der 2. Lösungsweg auf den Nachweis, daß es nur diese Lösung gibt. Beides ist als Lösung ausreichend.

<u>260524) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

a) Wählt man zum Beispiel die Augenzahlen 3 und 5, dann führt die Ausführung der Schritte (1) bis (4) zu folgenden Ergebnissen:

(1) $2 \cdot 3 = 6$,
(2) $6 + 5 = 11$,
(3) $11 \cdot 5 = 55$,
(4) $55 + 5 = 60$.

Wenn man von 60 die Zahl 25 subtrahiert, erhält man wie behauptet mit 35 eine Zahl, deren eine Ziffer die Augenzahl des einen und deren andere Ziffer die Augenzahl des anderen Würfels angibt.

b) Für jeden möglichen Wurf sind die mit zwei Würfeln geworfenen Augenzahlen zwei natürliche Zahlen a und b, für die $1 \leqq a \leqq 6$ und $1 \leqq b \leqq 6$ gilt. Damit führt die Ausführung der Schritte (1) bis (4) zu folgenden Ergebnissen:

(1) $2 \cdot a$,
(2) $2 \cdot a + 5$,

(3) $5 \cdot (2 \cdot a + 5) = 10 \cdot a + 25$,

(4) $10 \cdot a + 25 + b$.

Wenn man von $10 \cdot a + 25 + b$ die Zahl 25 subtrahiert, so erhält man wie behauptet mit $10 \cdot a + b$ diejenige Zahl, deren eine Ziffer a die Augenzahl des einen und deren andere Ziffer b die Augenzahl des anderen Würfels angibt.

Hinweis: Als möglicher (wenn auch umständlicher) Lösungsweg ist auch das Ausführen der Rechenschritte (1) bis (4) für alle 36 möglichen Würfe zu akzeptieren.

Empfehlung für die Punktverteilung
OKL 5 Gesamtpunktzahl: 40

260521

Richtige Zuordnung der Teilnehmer zu den Städten	8 Punkte
Angeben der beiden Vorjahresteilnehmer	2 Punkte
(Für Mängel in den Begründungen sind bis zu 2 Punkte abzuziehen.)	
	10 Punkte

260522

a) Aufzeichnen der 6 Anordnungen	4 Punkte
Angeben der Anzahl möglicher Anordnungen	1 Punkt
b) Erkennen, daß sich eine Anordnung der roten Spielmarken mit einer Anordnung der blauen Spielmarken zu einer neuen Reihe vereinigen läßt	2 Punkte
Angeben der Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten	3 Punkte
(Wenn nur die Hälfte der Anordnungsmöglichkeiten erkannt wurde, ist 1 Punkt abzuziehen. Für Mängel in der Darstellung des Lösungsweges sind bis zu 2 Punkte abzuziehen.)	
	10 Punkte

260523

Planfigur (Diese Punkte sind auch bei Fehlen einer Planfigur zu erteilen, falls die Längen $\overline{AC}$ bzw. $\overline{AD}$ richtig angegeben werden.)	2 Punkte
Angeben der Länge $\overline{AC}$	3 Punkte
Angeben der Länge $\overline{AD}$	3 Punkte
Zeichnung	2 Punkte
(Für Mängel in der Darstellung des Lösungsweges sind bis zu 2 Punkte abzuziehen.)	
	10 Punkte

260524

a) Ausführung der Schritte für das Beispiel	4 Punkte
Hinweis auf die Richtigkeit der Behauptung für das Beispiel	1 Punkt
b) Nachweis der Gültigkeit der Behauptung für alle möglichen Würfe	5 Punkte
	10 Punkte