A 11/12;I XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>251231</u>

Man ermittle alle diejenigen Paare (m,n) natürlicher Zahlen m und n, für die die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:

(1) $m+n$ und $m \cdot n$ sind zweistellige Zahlen.

(2) Vertauscht man die Ziffern der Zahl $m+n$ miteinander, so erhält man die (Zifferndarstellung der) Zahl $m \cdot n$.

<u>251232</u>

Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 3$ seien n Kreise $K_1, \ldots, K_n$ so in einer Ebene gelegen, daß sie folgende Bedingungen erfüllen (wobei der Kreis K_1 auch mit K_{n+1} bezeichnet sei):

Es gibt einen Punkt O, der auf allen Kreisen $K_1, \ldots, K_n$ liegt.

Für $i = 1, \ldots, n$ gilt: K_i und K_{i+1} haben noch genau einen von O verschiedenen Punkt A_i gemeinsam.

Die Punkte $A_1, \ldots, A_n$ sind paarweise verschieden; die Strahlen von O aus durch $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n, A_1$ sind in dieser Reihenfolge um O herum angeordnet.

Ferner seien $P_1, \ldots, P_{n+1}$ Punkte, die folgende Bedingungen erfüllen:

Für $i = 1, \ldots, n$ gilt: P_i liegt auf K_i und ist von O und A_i verschieden; P_{i+1} ist der von A_i verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_{i+1} mit der Geraden durch P_i und A_i.

Die Strahlen von O aus durch $A_n, P_1, A_1, P_2, A_2, \ldots, P_n, A_n$ sind in dieser Reihenfolge um O herum angeordnet.

a) Beweisen Sie, daß für $n = 3$ aus diesen Voraussetzungen stets $P_4 = P_1$ folgt!

b) Untersuchen Sie, ob für jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ aus den genannten Voraussetzungen stets $P_{n+1} = P_1$ folgt!

Von den nachstehenden Aufgaben 251233A und 251233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

251233A

Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele 5-Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ von positiven ganzen Zahlen gibt, für die die folgende Gleichung (1) erfüllt ist:

$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^{11} = x_5^{13}. \qquad (1)$$

251233B

Beweisen Sie, daß es unter allen Zerlegungen

$$100 = z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n$$

der Zahl 100 in reelle Faktoren

$$z_i \geqq 2 \ (i = 1, \ldots, n;\ n \text{ positiv ganzzahlig})$$

eine Zerlegung gibt, für die die Summe

$$s = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$$

einen kleinstmöglichen Wert hat! Ermitteln Sie eine solche Zerlegung!

A 11/12;II XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

251234

Acht Gegenstände, die mit $A_1, A_2, \dots, A_8$ bezeichnet seien, sind in zwei Schränken S_1 und S_2 verschlossen worden. Zur Ermittlung der Verteilung der Gegenstände werden folgende Aussagen gemacht:

In dem Schrank S_1 befindet sich

(1) A_1 genau dann, wenn sich A_3 und A_5 beide in S_1 befinden;

(2) A_2 genau dann, wenn sich A_3 und A_6 beide in S_1 befinden;

(3) A_3 genau dann, wenn sich A_4 und A_8 beide in S_2 befinden;

(4) A_4 genau dann, wenn sich A_1 und A_8 beide in S_2 befinden;

(5) A_5 genau dann, wenn sich A_6 in einem anderen Schrank befindet als A_7;

(6) A_6 genau dann, wenn sich A_4 in einem anderen Schrank befindet als A_5;

(7) A_7 genau dann, wenn sich A_1 in demselben Schrank befindet wie A_2;

(8) A_8 genau dann, wenn sich A_5 in demselben Schrank befindet wie A_7.

Ermitteln Sie alle diejenigen für eine Verteilung der acht Gegenstände auf die beiden Schränke bestehenden Möglichkeiten, bei denen alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind!

251235

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die die folgende Gleichung (1) gilt:

$$\frac{x^2 + 12x + 4}{x + 2} = 6\sqrt{x}. \qquad (1)$$

251236

Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geqq 2$ seien 2n Punkte $P_1, \dots, P_{2n}$ im Raum so gelegen, daß es keine Ebene gibt, auf der vier dieser Punkte liegen. Mit T sei die Menge aller derjenigen Tetraeder bezeichnet, deren vier Eckpunkte der Menge

$$M = \{P_1, \dots, P_{2n}\}$$

angehören. Für jede Ebene ε, die keinen Punkt von M enthält, sei t_ε die Anzahl aller derjenigen Tetraeder aus T, die mit ε ein Viereck als Schnittfläche gemeinsam haben.

Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 2$ den größtmöglichen Wert, den t_ε annehmen kann!

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11 und 12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

251231) Lösung: **6 Punkte**

I. Wenn ein Paar (m,n) natürlicher Zahlen, für das außerdem noch

$$m \leqq n \tag{3}$$

gilt, die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt: Es gibt natürliche Zahlen a und b mit

$$1 \leqq a \leqq 9,\ 1 \leqq b \leqq 9, \tag{4}$$

$$m + n = 10a + b, \tag{5}$$

$$mn = 10b + a. \tag{6}$$

Multipliziert man (5) mit m und subtrahiert (6), so folgt

$$m^2 = a(10m - 1) - b(10 - m). \tag{7}$$

Aus (5) und (4) folgt $mn \neq 0$, also $m \neq 0$.

Aus (3), (6) und (4) folgt $m^2 \leqq mn \leqq 99 < 100$, also $m < 10$.

Daher kann m nur eine der in der folgenden Tabelle genannten Zahlen sein. Anschließend sind dort zu der aus (7) folgenden Gleichung $(10m - 1)a = (10 - m)b + m^2$ Schlußfolgerungen genannt die sich aus $b \leqq 9$ oder aus Teilbarkeitsaussagen (bzw. Aussagen über Division mit Rest) ergeben:

m	Schluß aus (7)	Schluß aus $b \leqq 9$	Schluß aus Teilbarkeit	a	b,n aus (7), (5)
1	$9a = 9b + 1$		$9(a-b) = 1$, Widerspruch	-	-
2	$19a = 8b + 4$	$19a \leqq 76$, $a \leqq 4$	$19a = 4(2b+1)$, $4 \mid a$	$a=4$	$b = 9$, $n = 47$
3	$29a = 7b + 9$	$29a \leqq 72$, $a \leqq 2$	$a = 7(b-4a+1) + 2$	$a=2$	$b = 7$, $n = 24$
4	$39a = 6b + 16$	$39a \leqq 70$, $a=1$	$39 = 2(3b+8)$ Widerspruch	-	-
5	$49a = 5b + 25$	$49a \leqq 70$, $a=1$	$49 = 5(b+5)$ Widerspruch	-	-
6	$59a = 4b + 36$	$59a \leqq 72$, $a=1$	$59 = 4(b+9)$ Widerspruch	-	-
7	$69a = 3b + 49$	$69a \leqq 76$, $a=1$	$3(23-b) = 49$ Widerspruch	-	-
8	$79a = 2b + 64$	$79a \leqq 82$, $a=1$	$79 = 2(b+32)$ Widerspruch	-	-
9	$89a = b + 81$	$89a \leqq 90$, $a=1$		$a=1$	$b = 8$, $n = 9$

Daher können die Bedingungen (1), (2) und (3) nur von den Paare

$(m;n) = (2;47), (3;24), (9;9)$

erfüllt werden.

II. Sie werden von diesen Paaren erfüllt, wie aus

$2 + 47 = 49, \quad 3 + 24 = 27, \quad 9 + 9 = 18,$

$2 \cdot 47 = 94, \quad 3 \cdot 24 = 72, \quad 9 \cdot 9 = 81$

ersichtlich ist.

Ohne die Bedingung (3) ergibt sich somit, da die beiden geforderten Bedingungen (1) und (2) bei Vertauschung von m mit n unverändert bleiben: Diese Bedingungen (1), (2) werden genau von den Paaren

$(2;47), (3;24), (9;9), (24;3), (47;2)$

erfüllt.

Ein anderer Lösungsansatz (der zwar die Betrachtung von mehr Einzelfällen erfordert, aber noch in erträglicher Anzahl) besteht nach der Herleitung von $1 \leqq m \leqq 9$ z. B. darin, in der Bedingung (6) zunächst nur die Einerziffern zu diskutieren, d. h. zu jeder der Annahmen, daß eine der Ziffern $a = 1, \ldots, 9$ die Einerziffer des Produkts mn sei, alle Möglichkeiten für m und die Einerziffer von n aufzuzählen. Man erhält zu jeder dieser Möglichkeiten aus (5) die Einerziffer b der Summe m+n und kann dann (nach dem Ausscheiden von Fällen b=0) jedesmal nachrechnen, ob die Zahlen m und n = 10a + b auch die vollständige Bedingung (6) erfüllen.

251232) Lösung: 8 Punkte

a)

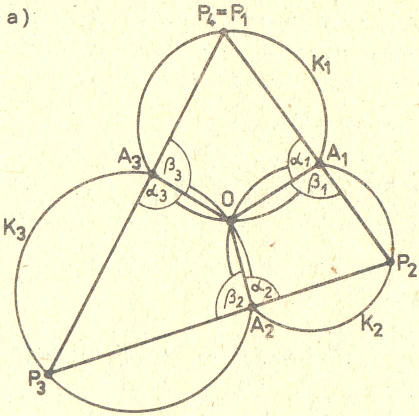

Abb. L 251232a

Nach den Voraussetzungen über $O, A_3, P_1, A_1, P_2, A_2, P_3$ sind $OA_3P_1A_1$, $OA_1P_2A_2$ und $OA_2P_3A_3$ Sehnenvierecke.

Für
$$\alpha_1 = \overline{\sphericalangle P_1A_1O},\quad \beta_1 = \overline{\sphericalangle P_2A_1O},$$
$$\alpha_2 = \overline{\sphericalangle P_2A_2O},\quad \beta_2 = \overline{\sphericalangle P_3A_2O},$$
$$\alpha_3 = \overline{\sphericalangle P_3A_3O},\quad \beta_3 = \overline{\sphericalangle P_1A_3O}$$
gilt daher

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_3 &= 180^\circ, \\ \alpha_2 + \beta_1 &= 180^\circ, \\ \alpha_3 + \beta_2 &= 180^\circ. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ferner geht nach Voraussetzung die Verlängerung von P_1A_1 über A_1 hinaus durch P_2 und die Verlängerung von P_2A_2 über A_2 hinaus P_3
durch P_4, also gilt

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= 180^\circ, \\ \alpha_2 + \beta_2 &= 180^\circ. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $\alpha_3 + \beta_3 = 180^\circ$. Also geht die Verlängerung von P_3A_3 über A_3 hinaus durch P_1. Hiernach ist P_1 der von A_3 verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_1 mit der Geraden durch P_3 und A_3. Dieser Schnittpunkt ist aber nach Voraussetzung P_4; somit ist $P_4 = P_1$ bewiesen.

b) Nach den Voraussetzungen über $O, A_n, P_1, A_1, \ldots, A_{n-1}, P_n$ sind $OA_nP_1A_1$, $OA_1P_2A_2$, ..., $OA_{n-1}P_nA_n$ Sehnenvierecke. Für

$$\alpha_1 = \overline{\sphericalangle P_1A_1O},\qquad \beta_1 = \overline{\sphericalangle P_2A_1O},$$

. . . .

$$\alpha_{n-1} = \overline{\sphericalangle P_{n-1}A_{n-1}O}, \quad \beta_{n-1} = \overline{\sphericalangle P_nA_{n-1}O},$$
$$\alpha_n = \overline{\sphericalangle P_nA_nO}, \quad \beta_n = \overline{\sphericalangle P_1A_nO}$$

gilt daher

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_n = 180^\circ, \\ \alpha_2 + \beta_1 = 180^\circ, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_n + \beta_{n-1} = 180^\circ. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Ferner geht nach Voraussetzung

die Verlängerung von P_1A_1 über A_1 hinaus durch P_2,

....

die Verlängerung von $P_{n-1}A_{n-1}$ über A_{n-1} hinaus durch P_n,

also gilt

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} = 180^\circ. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt $\alpha_n + \beta_n = 180^\circ$. Also geht die Verlängerung von P_nA_n über A_n hinaus durch P_1. Hiernach ist P_1 der von A_n verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_1 mit der Geraden durch P_n und A_n. Dieser Schnittpunkt ist aber nach Voraussetzung P_{n+1}; somit folgt für jedes $n \geq 3$ aus den Voraussetzungen stets $P_{n+1} = P_1$.

Hinweise:

1. Die Lösung kann natürlich auch so formuliert werden, daß zuerst b) gelöst wird, womit sich eine gesonderte Behandlung von a) erübrigt.

2. Der Schluß auf $P_{n+1} = P_1$ ist auch ohne die Anordnungsvoraussetzungen über die Strahlen aus O möglich. Zum Beweis kann man z. B. Verallgemeinerungen des Peripheriewinkelsatzes bzw. des Satzes über Sehnenvierecke für orientierte Winkel (mit vorzeichenfähigen Winkelgrößen) oder Methoden der analytischen Geometrie heranziehen; andernfalls müßte eine Diskussion aller Anordnungsmöglichkeiten erfolgen. Dies ist für $n = 3$ noch wenig problematisch, für größere n komplizierter.

3. Man kann auch (nochmals in Abschwächung der Voraussetzungen) zulassen, daß K_i und K_{i+1} sich in O berühren. Dabei hat man $A_i = O$ zu definieren und im Beweis anstelle der Geraden durch O, A_i (die zur Definition von α_i, β_i benötigt wird) die gemeinsame Tangente von K_i und K_{i+1} in O zu verwenden.

4. Ein anderer Beweisweg zu b) verwendet vollständige Induktion: Sei $n > 3$ und die Aussage bereits für $n-1$ statt n wahr. Dann bezeichne man den von O verschiedenen Schnittpunkt der Kreise K_1 und K_{n-1} mit A' (bzw. setze A' = O, falls K_1 und K_{n-1} sich in O berühren). Aus der Induktionsannahme folgt dann, daß P_{n-1} der von A' verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_{n-1} mit der Geraden durch P_1 und A' ist. Wendet man nun die für $n = 3$ bewiesene Aussage auf K_1, K_{n-1}, K_n; $P_1, P_{n-1}, P_n, P_{n+1}$ an, so folgt $P_{n+1} = P_1$. Erforderlich ist hierzu allerdings für $n = 3$ die eben im Sinne der Hinweise 2 und 3 verallgemeinerte Aussage.

Hinweis zur Korrektur:

Lösungswege, die (wie z. B. eben in Hinweis 4 beschrieben) eine Diskussion anderer Lagemöglichkeiten erfordern, sind, wenn mögliche Fälle einer solchen Lagediskussion nicht betrachtet werden, nur mit anteiliger Punktbewertung einzuschätzen. Genauere Beweise von Anordnungsaussagen werden dagegen nicht vom Schüler verlangt.

251233A) Lösung: 7 Punkte

Eine Möglichkeit, 5-Tupel mit den genannten Eigenschaften anzugeben, besteht darin, zunächst folgendermaßen positive ganze Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 so anzusetzen, daß mit einer natürlichen Zahl n

$$x_1^3 = x_2^5 = x_3^7 = x_4^{11} = 2^n \qquad (2)$$

ist:

Man setze

$$n = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot k, \qquad (3)$$

wobei k eine (zunächst noch nicht festgelegte) positive ganze Zahl ist. Mit einer solchen Zahl n sind dann in der Tat

$$x_1 = 2^{\frac{n}{3}},\ x_2 = 2^{\frac{n}{5}},\ x_3 = 2^{\frac{n}{7}},\ x_4 = 2^{\frac{n}{11}} \qquad (4)$$

positive ganze Zahlen, für die (2) gilt.

Daraus folgt:

$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^{11} = 4 \cdot 2^n = 2^{n+2}. \qquad (5)$$

Kann man außerdem erreichen, daß n+2 durch 13 teilbar ist, so ist 2^{n+2} die 13. Potenz der positiven ganzen Zahl

$$x_5 = 2^{\frac{n+2}{13}}, \qquad (6)$$

und damit ist wegen (5) die Gleichung (1) erfüllt.

Nun gilt $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155$ und $1157 = 13 \cdot 89$. Für jede natürliche Zahl m hat daher die Zahl

$$n = 1155 \cdot (13m + 1) \tag{7}$$

die Eigenschaft, daß $n+2 = 13 \cdot (1155m + 89)$ durch 13 teilbar ist.

Also bestehen alle 5-Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, in denen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 gemäß (4) und (6) mit n aus (7) gebildet sind, aus positiven ganzen Zahlen, die die Gleichung (1) erfüllen. Es gibt folglich unendlich viele derartige 5-Tupel.

251233B) Lösung: 7 Punkte

Für jede positive ganze Zahl n und je n reelle Zahlen $z_1, \ldots, z_n \geqq 2$ mit $z_1 \cdot \ldots \cdot z_n = 100$ gilt $2^n \leqq z_1 \cdot \ldots \cdot z_n = 100 < 2^7$, also $n < 7$. Ferner gilt nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

$$s = z_1 + \ldots + z_n \geqq n \cdot \sqrt[n]{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n} = n \cdot \sqrt[n]{100},$$

und dabei gilt das Gleichheitszeichen [genau] dann, wenn $z_1 = \ldots = z_n$ ist.

Weiter bestätigt man, daß für jedes $n = 1, 2, \ldots, 6$ die Zerlegung von 100 in die Faktoren $z_1 = \ldots = z_n = \sqrt[n]{100}$ zu denjenigen gehört, die die Bedingung $z_i \geqq 2$ $(i = 1, \ldots, n)$ erfüllen; denn es gilt

$$100 > \sqrt{100} > \ldots > \sqrt[6]{100} > \sqrt[6]{64} = 2.$$

Daher nimmt s als kleinstmöglichen Wert die kleinste der Zahlen

$$1 \cdot 100,\ 2 \cdot \sqrt{100} = 20,\ 3 \cdot \sqrt[3]{100},\ 4 \cdot \sqrt[4]{100} = 4 \cdot \sqrt{10},$$
$$5 \cdot \sqrt[5]{100},\ 6 \cdot \sqrt[6]{100} = 6 \cdot \sqrt[3]{10}$$

an.

Nun gilt $8000 > 2700$, d. h. $20^3 > 3^3 \cdot 100$ und daher $20 > 3 \cdot \sqrt[3]{100}$.

Ferner gilt $3^3 \cdot 100 > 3^3 \cdot 80 = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 10$ und daher $3 \cdot \sqrt[3]{100} > 6 \cdot \sqrt[3]{10}$.

Weiter gilt $2^6 \cdot 72900 > 2^6 \cdot 64000$, d. h. $2^6 \cdot 3^6 \cdot 10^2 > 2^6 \cdot 2^6 \cdot 10^3$ und daher $6 \cdot \sqrt[3]{10} > 4 \cdot \sqrt{10}$.

Schließlich gilt $128^3 \cdot 50000 > 125^3 \cdot 50000$,

d. h. $2^{20} \cdot 10^5 > 5^{10} \cdot 100^2$ und daher $4 \cdot \sqrt{10} > 5 \cdot \sqrt[5]{100}$.

Damit[1] ist bewiesen, daß unter allen in der Aufgabe genannten Zerlegungen die Summe s am kleinsten wird, wenn es sich um die Zerlegung in die 5 Faktoren $z_1 = \ldots = z_5 = \sqrt[5]{100}$ handelt[2].

---

1 Die Ungleichungen

$$5 \cdot \sqrt[5]{100} < 4 \cdot \sqrt{10} < 6 \cdot \sqrt[3]{10} < 3 \cdot \sqrt[3]{100} < 20$$

können auch unter Verwendung von Näherungswerten bewiesen werden. Dabei ist es erforderlich, zu Näherungswerten auch Genauigkeitsangaben und ihre Nutzung für einen Beweis der gewünschten Ungleichungen anzuführen, z. B. mindestens so:
Es gilt auf 3 Dezimalen nach dem Komma genau

$\sqrt[5]{100} \approx 2{,}512$, $\sqrt{10} \approx 3{,}162$, $\sqrt[3]{10} \approx 2{,}154$, $\sqrt[3]{100} \approx 4{,}642$,
jeweils auf die angegebene Anzahl von Dezimalen genau

$5 \cdot \sqrt[5]{100} \approx 12{,}56$, $4 \cdot \sqrt{10} \approx 12{,}65$, $6 \cdot \sqrt[3]{10} \approx 12{,}9$,

$3 \cdot \sqrt[3]{100} \approx 14$.

Daraus folgt

$$5 \cdot \sqrt[5]{100} < 12{,}6 < 4 \cdot \sqrt{10} < 12{,}8 < 6 \cdot \sqrt[3]{10} < 13 < 3 \cdot \sqrt[3]{100} < 20.$$

Man kann auch mit Differentialrechnung nachweisen, daß $x \cdot \sqrt[x]{100}$ im Intervall $(0;\ \ln 100)$ streng monoton fallend und im Intervall $(\ln 100;\ +\infty)$ streng monoton steigend ist, woraus wegen $4 < \ln 100 < 5$ die Ungleichungen $100 > 2\sqrt{100} > 3 \cdot \sqrt[3]{100} > 4 \cdot \sqrt[4]{100}$ und $5 \cdot \sqrt[5]{100} < 6 \cdot \sqrt[6]{100}$ folgen. Eine Entscheidung, welche der beiden Zahlen $4 \cdot \sqrt[4]{100}$, $5 \cdot \sqrt[5]{100}$ die kleinere ist, erhält man damit noch nicht.

2 Es folgt sogar, daß dies die einzige Zerlegung mit dem Minimalwert s ist und daß dieser $5 \cdot \sqrt[5]{100}$ beträgt. Diese Angaben (sowie die hierzu beitragende Aussage "genau" bei der obigen Abschätzung von s) werden nicht vom Schüler verlangt.

XXV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

251234) Lösung: 6 Punkte

I. Wenn für eine Verteilung alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind, so folgt:

Angenommen, es wäre A_1 in S_1. Dann erhielte man die in Abbildung L 251234 a dargestellten Schlußfolgerungen. Die dabei erhaltene Aussage "A_6 in S_2" hätte nach (6) zur Folge, daß A_4 in demselben Schrank wie A_5 wäre, somit ein Widerspruch erreicht ist. Also ist

A_1 in S_2. (9)

Angenommen weiter, es wäre A_3 in S_1. Dann erhielte man die in Abbildung L 251234 b dargestellten Schlußfolgerungen. Die dabei erhaltene Aussage "A_4 in S_2" hätte nach (4) zur Folge, daß A_1 und A_8 nicht beide in S_2 wären, womit ein Widerspruch erreicht ist. Also ist

A_3 in S_2. (10)

Aus (10) und (2) folgt

A_2 in S_2, (11)

aus (9), (11) und (7) folgt

A_7 in S_1. (12)

Angenommen schließlich, es wäre A_8 in S_1. Dann erhielte man die in Abbildung L 251234 c dargestellten Schlußfolgerungen. Die dabei erhaltene Aussage "A_4 in S_1" hätte nach (4) zur Folge, daß A_8 in S_2 wäre, womit nochmals ein Widerspruch erreicht ist. Also ist

A_8 in S_2. (13)

Aus (9), (13) und (4) folgt

A_4 in S_1, (14)

aus (13), (8) und (12) folgt

A_5 in S_2, (15)

aus (14), (15) und (6) folgt

A_6 in S_1. (16)

		Folgerung aus				
		(1)	(3)	(8)	(7)	(2)
A_1	S_1					
A_2					S_2	
A_3		S_1				
A_4			S_2			
A_5		S_1				
A_6						S_2
A_7				S_2		
A_8			S_2			

Abb. L 251234 a

		Folgerung aus
		(3)
A_1	S_2	
A_2		
A_3	S_1	
A_4		S_2
A_5		
A_6		
A_7		
A_8		S_2

Abb. L 251234 b

		Folgerung aus		
		(8)	(5)	(6)
A_1	S_2			
A_2	S_2			
A_3	S_2			
A_4				S_1
A_5		S_1		
A_6			S_2	
A_7	S_1			
A_8	S_1			

Abb. L 251234 c

Also können nur für die in (9) bis (16) angegebene Verteilung alle Aussagen (1) bis (8) wahr sein.

II. Für die Verteilung (9) bis (16) gilt:
A_1 ist nicht in S_1; A_3 (und A_5) nicht in S_1; also ist (1) wahr.
A_2 ist nicht in S_1; A_3 nicht in S_1; also ist (2) wahr.
A_3 ist nicht in S_1; A_4 nicht in S_2; also ist (3) wahr.
A_4 ist in S_1; A_1 und A_8 sind beide in S_2; also ist (4) wahr.
A_5 ist nicht in S_1; A_6 ist in demselben Schrank S_1 wie A_7; also ist (5) wahr.
A_6 ist in S_1; A_4 ist nicht in dem Schrank S_2, in dem A_5 ist; also ist (6) wahr.
A_7 ist in S_1; A_1 ist in demselben Schrank S_2 wie A_2; also ist (7) wahr.
A_8 ist nicht in S_1; A_5 ist nicht in dem Schrank S_1, in dem A_7 ist; also ist (8) wahr.

Mit I. und II. ist bewiesen, daß genau bei der in (9) bis (16) angegebenen Verteilung alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind.

<u>251235) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Da $\sqrt{x}$ nur für $x \geqq 0$ existiert und da $x = 0$ die Gleichung (1) nicht erfüllt, so erhält man der Reihe nach: (1) ist äquivalent damit, daß x positiv ist und die Gleichung

$$\frac{(x+2)^2 + 8x}{x+2} = 6\sqrt{x}$$

bzw. $$x + 2 + \frac{8x}{x+2} = 6\sqrt{x}$$

bzw. $$\frac{x+2}{\sqrt{x}} + \frac{8\sqrt{x}}{x+2} = 6$$

erfüllt. Also ist (1) äquivalent damit, daß $x > 0$ ist und daß

die Zahl $z = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ die Gleichung $z + \frac{8}{z} = 6$

erfüllt. Diese ist der Reihe nach äquivalent mit

$$z^2 - 6z + 8 = 0,$$
$$z = 3 \pm \sqrt{9-8},$$
$$z = 2 \text{ oder } z = 4.$$

Da $\frac{x+2}{\sqrt{x}} = 2$ auf $x - 2\sqrt{x} + 2 = 0$, also auf den Widerspruch $(\sqrt{x} - 1)^2 + 1 = 0$ führt, ist folglich (1) der Reihe nach äquivalent damit, daß $x > 0$ und

$$\frac{x+2}{\sqrt{x}} = 4, \tag{2}$$

$$x - 4\sqrt{x} + 2 = 0,$$

$$(\sqrt{x} - 2)^2 = 2,$$

$$\sqrt{x} = 2 \pm \sqrt{2}$$

gilt. Wegen $2 \pm \sqrt{2} > 0$ ist somit (1) äquivalent zu

$$x = (2 \pm \sqrt{2})^2,$$

d. h. zu

$$x = 6 + 4\sqrt{2} \text{ oder } x = 6 - 4\sqrt{2}. \tag{3}$$

Anmerkungen: Es gibt verschiedene andere Lösungswege. So ist

$x > 0$ und (2) äquivalent mit $x > 0$ und $\frac{(x+2)^2}{x} = 16$, (4)

weil nicht nur aus (2) durch Quadrieren (4) folgt, sondern auch umgekehrt aus (4) und ($x > 0$, also erst recht) $x+2 > 0$ wieder (2).

Weitere Lösungsmöglichkeiten ergeben sich, indem man aus (1) durch Quadrieren eine Gleichung 4. Grades herleitet und in $(x^2-12x+4)(x^2+4) = 0$ zerlegt, oder indem man (1) für $w = \sqrt{x}$ in $(w^2-4w+2)(w^2-2w+2) = 0$ überführt. In diesen Lösungswegen ist jeweils beim Quadrieren eine Äquivalenz durch Vorzeichenbetrachtung zu sichern, oder es ist (wenn auf den Äquivalenznachweis zu den Einzelschritten verzichtet wird) anderweitig, z. B. als Probe, der Schluß von (3) auf (1) nachzuweisen.

251236) Lösung: 7 Punkte

Für jeweils 2n Punkte in der angegebenen Lage und für jede Ebene ε, die keinen Punkt von M enthält, gilt: Die Ebene ε zerlegt den Raum in zwei Halbräume, und mit einer natürlichen Zahl $k \leqq n$ gilt: In einem dieser beiden Halbräume liegt eine Menge M_1 von k Punkten aus M, in dem anderen liegt die aus den übrigen $2n-k$ Punkten bestehende Menge M_2. Ferner gilt für jedes Tetraeder aus T: Mit einer natürlichen Zahl $h \leqq 2$ liegen in einem dieser Halbräume h Eckpunkte des Tetraeders, in dem anderen $4-h$ Eckpunkte des Tetraeders. Ist $h = 0$, so schneidet ε das Tetraeder nicht; ist $h = 1$, so schneidet ε das Tetraeder in einem Dreieck; ist $h = 2$, so schneidet ε das Tetraeder in einem Viereck.

Somit erhält man genau dann ein Tetraeder aus T, das von ε in einem Viereck geschnitten wird, wenn man als Eckpunktmenge die Vereinigungsmenge aus einer beliebig gewählten zweielementigen

Untermenge Z_1 von M_1 und einer unabhängig hiervon beliebig gewählten zweielementigen Untermenge Z_2 von M_2 nimmt. Dabei führen zwei Auswahlmöglichkeiten für Z_1 und Z_2 genau dann zu demselben Tetraeder, wenn sie sowohl in Z_1 als auch in Z_2 übereinstimmen. Die Anzahl aller dieser Auswahlmöglichkeiten ist somit die in der Aufgabe erklärte Zahl t_ε . Sie ergibt sich, indem man die Anzahl aller zweielementigen Untermengen von M_1 mit der Anzahl aller zweielementigen Untermengen von M_2 multipliziert; d. h., es gilt

$$t_\varepsilon = \binom{k}{2} \cdot \binom{2n-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \cdot \frac{(2n-k)(2n-k-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (n - (n-k)) \cdot (n-1 - (n-k)) \cdot (n + (n-k)) \cdot$$

$$\cdot\ (n-1 + (n-k))$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (n^2 - (n-k)^2) \cdot ((n-1)^2 - (n-k)^2. \qquad (1)$$

Für alle natürlichen Zahlen $k \leqq n$ gilt nun $0 \leqq n-k \leqq n$, also

$$0 \leqq n^2 - (n-k)^2 \leqq n^2$$

und $(n-1)^2 - (n-k)^2 \leqq (n-1)^2$ sowie $(n-1)^2 \geqq 0$.

Daraus folgt

$$t_\varepsilon \leqq \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n-1)^2. \qquad (2)$$

Für $k = n$ ergibt sich [aus (1)] in (2) das Gleichheitszeichen.

Somit ist $\frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n-1)^2$ der gesuchte größtmögliche Wert von t_ε.