XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>251221</u>

Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$x^2 + y^2 = 5, \qquad (1)$$
$$x^2 + xy = 2. \qquad (2)$$

<u>251222</u>

Beweisen Sie, daß in jedem Dreieck ABC für die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ und die Länge s_a der Verbindungsstrecke zwischen dem Punkt A und dem Mittelpunkt M der Strecke BC die Beziehung

$$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2}$$

gilt!

<u>251223</u>

a) Es seien (a_n) und (b_n) die durch

$$a_n = 3n - 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$b_n = a_n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

definierten Zahlenfolgen. Beweisen Sie, daß dann die Folge der Differenzen

$$b_{n+1} - b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

eine arithmetische Zahlenfolge ist!

b) Eine Verallgemeinerung der in a) zu beweisenden Aussage lautet:

Wenn (a_n) eine beliebige arithmetische Folge und (b_n) die durch

$$b_n = a_n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

definierte Folge ist, dann ist die Folge der Differenzen

$$b_{n+1} - b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ebenfalls eine arithmetische Folge.

Beweisen Sie auch diese Verallgemeinerung!

<u>251224</u>

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, die die folgende Eigenschaft haben: Im abgeschlossenen Intervall $\langle 2^n, 2^{n+1} \rangle$ befindet sich mindestens eine durch n^3 teilbare natürliche Zahl.

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

251221) Lösung: 9 Punkte

I. Wenn ein Paar $(x; y)$ reeller Zahlen das Gleichungssystem (1), (2) erfüllt, so folgt:

Nach (2) gilt $x \neq 0$; somit folgt aus (2)

$$y = \frac{2}{x} - x. \qquad (3)$$

Setzt man dies in (1) ein, so ergibt sich

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 4 + x^2 = 5,$$
$$2x^4 - 9x^2 + 4 = 0.$$

Für die Zahl $z = x^2$ (4)

gilt daher

$$z^2 - \frac{9}{2}z + 2 = 0,$$

also ist z eine der Zahlen

$$z_{1,2} = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - 2},$$
$$= \frac{9}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{49},$$

d. h. $z_1 = 4$, $z_2 = \frac{1}{2}$.

Wegen (4) ist somit x eine der Zahlen

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{2};$$

nach (3) gehört hierzu als Wert für y jeweils die entsprechende der Zahlen

$$y_1 = -1, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \quad y_4 = -\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Also können nur die Paare

$$(2; -1), \; (-2; 1), \; (\tfrac{1}{2}\sqrt{2}; \tfrac{3}{2}\sqrt{2}), \; (-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}; -\tfrac{3}{2}\sqrt{2}) \qquad (5)$$

das System (1, (2) erfüllen.

II. Sie erfüllen es, wie aus

$$(\pm 2)^2 + (\mp 1)^2 = 4+1 = 5, \quad (\pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2 + (\pm \tfrac{3}{2}\sqrt{2})^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{9}{2} = 5,$$
$$(\pm 2)^2 + (\pm 2)(\mp 1) = 4-2 = 2, \quad (\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2 + (\pm\tfrac{3}{2}\sqrt{2})\cdot(\pm\tfrac{3}{2}\sqrt{2}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} = 2$$

ersichtlich ist.

Mit I. und II. ist bewiesen, daß genau die Paare (5) das System (1), (2) erfüllen.

251222) Lösung: 9 Punkte

Bezeichnet δ die Größe des Winkels $\sphericalangle AMC$, dann gilt nach dem Kosinussatz, angewendet auf die Dreiecke AMC und AMB,

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + s_a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot s_a \cdot \cos \delta, \qquad (1)$$

$$c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + s_a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot s_a \cdot \cos (180^\circ - \delta) \qquad (2)$$

Unter Beachtung von $\cos (180^\circ - \delta) = - \cos \delta$ folgt aus (1) und (2) durch Addition

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2 \cdot s_a^2,$$

woraus sich wegen $s_a > 0$ unmittelbar die Behauptung

$$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2}$$

ergibt.

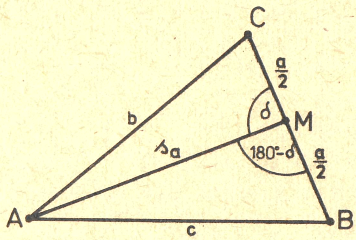

Abb. L 251222

251223) Lösung: 10 Punkte

a) Für jedes n = 1, 2, 3, ... gilt

$$b_n = (3n - 2)^2, \text{ also } b_{n+1} = (3(n+1)-2)^2 = (3n+1)^2$$

und daher

$$b_{n+1} - b_n = 9n^2 + 6n + 1 - (9n^2 - 12n + 4) = 18\,n - 3.$$

In der Folge dieser Zahlen hat die Differenz

$$18(n+1) - 3 - (18n - 3) = 18$$

für alle n denselben Wert; die Folge der Zahlen $b_{n+1} - b_n$ ist somit eine arithmetische Folge, w.z.b.w.

b) Wenn (a_n) eine beliebige arithmetische Folge mit (dem Anfangsglied a_1 und) der Differenz d ist, so ist für jedes n = 1, 2, 3, ...

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

und damit nach Voraussetzung

$$b_n = (a_1 + dn - d)^2,$$

also

$$b_{n+1} = (a_1+d(n+1) - d)^2 = (a_1 + dn)^2$$

und daher

$$b_{n+1} - b_n = a_1^2 + 2a_1dn + d^2n^2 - (a_1^2+2a_1dn-2a_1d+d^2n^2-2d^2n+d^2)$$
$$= 2a_1d + 2d^2n - d^2.$$

In der Folge dieser Zahlen hat die Differenz

$$2a_1d+2d^2(n+1)-d^2 - (2a_1d+2d^2n-d^2) = 2d^2$$

für alle n denselben Wert; die Folge der Zahlen $b_{n+1} - b_n$ ist somit eine arithmetische Folge, w.z.b.w.

Hinweis: Man kann auch erst b) lösen; zu a) genügt dann die Feststellung, daß die zu zeigende Aussage als Spezialfall von b) mit erfaßt wird.

251224) Lösung: 12 Punkte

Das Intervall $\langle 2^1; 2^2 \rangle = \langle 2; 4 \rangle$ enthält ganze, also durch 1^3 teilbare Zahlen. Das Intervall $\langle 2^2; 2^3 \rangle = \langle 4; 8 \rangle$ enthält die Zahl $8 = 2^3$, die durch sich selbst teilbar ist. Somit haben die Zahlen n = 1 und n = 2 die verlangte Eigenschaft.

Wie die Tabelle zeigt, gelten für jede ganze Zahl n mit $3 \leqq n \leqq 7$ die Ungleichungen $0 < 2^n < 2^{n+1} < n^3$. Da nun zwischen 0 und n^3 keine durch n^3 teilbare Zahl liegt, haben diese Zahlen n = 3, ..., 7 nicht die verlangte Eigenschaft.

n	2^n	2^{n+1}	n^3
3	8	16	27
4	16	32	64
5	32	64	125
6	64	128	216
7	128	256	343

Das Intervall $\langle 2^8; 2^9 \rangle$ enthält die Zahl $2^9 = (2^3)^3 = 8^3$, die durch sich selbst teilbar ist. Das Intervall $\langle 2^9; 2^{10} \rangle$ enthält wegen $8^3 = 2^9$ und $10^3 < 1024 = 2^{10}$ die Zahl 9^3, die durch sich selbst teilbar ist. Also haben auch n = 8 und n = 9 die verlangte Eigenschaft.

Für jede positive ganze Zahl n enthält das Intervall $\langle 2^n; 2^{n+1} \rangle$ jedenfalls $2^{n+1}-2^n+1 = 2^n+1$ aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Ist $n \geqq 10$, so wird im folgenden die Ungleichung

$$2^n + 1 \geqq n^3 \qquad (1)$$

bewiesen. Aus ihr folgt dann: Unter den in $\langle 2^n; 2^{n+1} \rangle$ enthaltenen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen befindet sich, da ihre Anzahl mindestens n^3 beträgt, mindestens eine durch n^3 teilbare Zahl; d. h., auch jede natürliche Zahl $n \geqq 10$ hat die verlangte Eigenschaft.

Beweis zu (1):

I. Es gilt $2^{10}+1 = 1025 > 10^3$, also die behauptete Ungleichung für $n = 10$.

II. Wenn für eine natürliche Zahl $n = k \geqq 10$ die Ungleichung (Induktionsvoraussetzung) $2^k+1 \geqq k^3$ gilt, so folgt $2^{k+1}+1 = 2\cdot 2^k+1 = 2(2^k+1) - 1 \geqq 2k^3 - 1$.

Indem man wiederholt $k \geqq 10$ berücksichtigt, erhält man hieraus der Reihe nach erst recht

$$\begin{aligned} 2^{k+1}+1 &\geqq k^3+k\cdot k^2 -1 \\ &> k^3+4k^2 -1 = k^3+3k^2+k\cdot k -1 \\ &> k^3+3k^2+4k -1 = k^3+3k^2+3k+k-1 \\ &> k^3+3k^2+3k+1 = (k+1)^3 \end{aligned}$$

und damit die behauptete Ungleichung für $n = k+1$.

Mit I. und II. ist die Behauptung (1) für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 10$ durch vollständige Induktion bewiesen.

Insgesamt hat sich somit ergeben, daß genau für

$n = 1$, $n = 2$ und alle natürlichen Zahlen $n \geqq 8$

die verlangte Eigenschaft vorliegt.

Empfehlung für die Punktverteilung
OKL 11/12 Gesamtpunktzahl: 40

251221	**9 Punkte**
- Herleitung von $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$	4 Punkte
(bei Nichtvermerken von $x \neq 0$ 1 Punkt Abzug)	
- Angabe aller x_i $(i = 1, \ldots, 4)$	1 Punkt
- Angabe aller y_i $(i = 1, \ldots, 4)$	1 Punkt
- Angabe der Lösungspaare	1 Punkt
- Probe (II)	2 Punkte
251222	**9 Punkte**
- (1)	3 Punkte
- (2)	2 Punkte
- $b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2 \cdot s_a^2$	2 Punkte
- $s_a = \frac{1}{2}\sqrt{\ldots}$	2 Punkte
251223	**10 Punkte**
- a)	4 Punkte
(davon für $b_{n+1} - b_n = 18n - 3$ 2 Punkte)	
- b)	6 Punkte
(davon für $b_{n+1} - b_n = 2n_1 d + 2d^2 n - d^2$ 4 Punkte)	
(Wird zuerst b) gezeigt und a) als Spezialfall von b) herausgestellt, so für b) 8 Punkte und für a) 2 Punkte.)	
251224	**12 Punkte**
- Nachweis für $n = 1$ und $n = 2$	2 Punkte
- Nachweis, daß $n \neq 3, 4, 5, 6, 7$ ist	2 Punkte
- Nachweis für $n = 8$ und $n = 9$	2 Punkte
- Beweis, daß $2^n + 1 \geqq n^3$ für alle $n \geqq 10$ gilt	4 Punkte
- Folgerung, daß für $n \geqq 10$ die geforderte Eigenschaft gilt	1 Punkt
- Zusammenfassendes Ergebnis	1 Punkt