Klaus Krüger
256 Bad Doberan
Kollbruchweg 3

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen.

251041

Beweisen Sie, daß

$$\frac{1281^3 + 1282^3 + 1283^3 + 1284^3 + 1285^3 + 1286^3 + 1287^3}{639 \cdot 640 + 641 \cdot 642 + 642 \cdot 643 + 644 \cdot 645}$$

eine durch 7 teilbare natürliche Zahl ist!

251042

Es sei ABCD ein Quadrat, sein Flächeninhalt sei F(ABCD), sein Umkreis sei k. Beschreiben Sie eine Konstruktion für ein (nicht notwendig regelmäßiges) konvexes Sechseck PQRSTU, dessen sämtliche Eckpunkte auf k liegen und dessen Flächeninhalt gleich F(ABCD) ist! Beweisen Sie, daß jedes Sechseck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, diese Forderungen erfüllt!

Von den nachstehenden Aufgaben 251043A und 251043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

251043A

Kurt möchte auf einer Holzkugel K vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 konstruieren, die die Bedingungen

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_3} = \overline{P_1P_4} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_2P_4} = \overline{P_3P_4}$$

erfüllen. Folgende Hilfsmittel stehen ihm zur Verfügung:

- Ein ebenes Zeicherblatt B, auf dem eine Strecke DE gegeben ist, deren Länge gleich dem Durchmesser d der Kugel K ist,
- ein Zirkel, mit dem man sowohl auf B als auch auf der Oberfläche der Kugel K Kreise zeichnen kann (der Zirkel besitzt zu diesem Zweck einknickbare, genügend lange Schenkel),
- ein Lineal (wie üblich nur zum Konstruieren gerader Linien auf B zu verwenden, nicht zur Skalenbenutzung).

Beschreiben Sie eine Konstruktion, die sich mit diesen Hilfsmitteln ausführen läßt! Beweisen Sie, daß durch die von Ihnen beschriebene Konstruktion vier Punkte der geforderten Art erhalten werden!

Hinweis: Unter $\overline{P_iP_j}$ ist die Länge der im Raum geradlinig (nicht auf der Kugeloberfläche) verlaufenden Verbindungsstrecke der Punkte P_i, P_j zu verstehen. Ebenso wird beim Konstruieren eines Kreises auf K die Zirkelspanne als geradlinige Streckenlänge festgelegt.

251043B

Gegeben seien reelle Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4. Man ermittle zu jedem möglichen Fall für diese $a_1, \ldots, a_4$ jeweils alle diejenigen Tripel (b_1, b_2, b_3) reeller Zahlen (bzw. beweise gegebenenfalls, daß es keine solchen Tripel gibt), für die das Gleichungssystem

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + x_3^2 = b_1,$$
$$x_2^2 + a_3x_3^2 = b_2,$$
$$x_2^2 + a_4x_3^2 = b_3$$

genau ein Tripel (x_1, x_2, x_3) reller Zahlen als Lösung hat.

A 10;II XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

251044

Ermitteln Sie alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen r, für die die Gleichung $\frac{2x}{r(x+r)} + \frac{1}{x-2r} = \frac{4x-r+6}{r(x-2r)(x+r)}$

a) genau zwei verschiedene reelle Lösungen,

b) genau eine reelle Lösung,

c) keine reelle Lösung

besitzt!

251045

Stellen Sie fest, ob es möglich ist, einen Würfel mittels einer Ebene so zu schneiden, daß als Schnittfigur

a) ein regelmäßiges Dreieck

b) ein regelmäßiges Viereck

c) ein regelmäßiges Fünfeck

entsteht!

251046

Es sei $F = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ diejenige unendliche Folge natürlicher Zahlen, die durch die Festsetzungen (1), (2) definiert ist:

(1) Die ersten vier Glieder der Folge F lauten $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 8$, $a_4 = 6$; sie bilden also die Teilfolge (1, 9, 8, 6).

(2) Für jedes $n \geq 5$ ist a_n die Einerziffer der Summe der vier Glieder, die dem Glied a_n in der Folge F unmittelbar vorangehen.

Man untersuche, ob es in der Folge F außer der Teilfolge (a_1, a_2, a_3, a_4) noch eine weitere Teilfolge gibt, die aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern von F besteht und (1, 9, 8, 6) lautet.

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>251041)Lösung</u>: <u>7 Punkte</u>

Die zu untersuchende Zahl ist für $n = 642$ der Bruch mit dem Zähler

$$Z = (2n-3)^3+(2n-2)^3+(2n-1)^3+(2n)^3+(2n+1)^3+(2n+2)^3+(2n+3)^3$$

und dem Nenner

$$N = (n-3)(n-2) + (n-1)n + n(n+1) + (n+2)(n+3).$$

Da für $k = 1, 2, 3$

$$(2n-k)^3 + (2n+k)^3 = 16n^3 + 12nk^2$$

gilt, ergibt sich

$$Z = 3 \cdot 16n^3 + 12n(1 + 4 + 9) + 8n^3 = 7 \cdot 8n(n^2 + 3).$$

Ferner ist

$$N = n^2 - 5n + 6 + n^2 - n + n^2 + n + n^2 + 5n + 6 = 4(n^2 + 3).$$

Also ist die zu untersuchende Zahl gleich $7 \cdot 2n$ und daher eine durch 7 teilbare natürliche Zahl, w.z.b.w.

<u>Weitere Lösungsmöglichkeiten</u> bestehen im Zitieren oder Herleiten von Formeln wie $\sum_{j=1}^{m} j^3 = \frac{1}{4}m^2(m+1)^2$, also

$$(a+1)^3 + \ldots + (a+7)^3 = \frac{1}{4}((a+7)^2(a+8)^2 - a^2(a+1)^2)$$

usw.

Zu akzeptieren (trotz fehlender "Eleganz") ist auch eine Lösungsdarstellung durch Ausrechnen.

<u>251042)Lösung</u>: <u>7 Punkte</u>

Die Lösung ist nicht eindeutig; eine Lösungsmöglichkeit ist die folgende:

a) Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man wählt $P = A$ und $S = C$.

(2) Man wählt auf dem von C nach D führenden Viertelkreisbogen v des Kreises k einen Punkt R ($\neq C$, $\neq D$).

(3) Man konstruiert die Parallele g durch D zu AC und ihren Schnittpunkt E mit der Geraden durch C und R. Dieser Schnittpunkt existiert und ist eindeutig bestimmt, da[1] R nicht auf der Geraden durch A und C liegt, also die Gerade durch C und R nicht parallel zu g ist.

(4) Man konstruiert die Parallele h durch E zu AR und ihren Schnittpunkt Q mit dem Viertelkreisbogen v. Dieser Schnittpunkt existiert und ist eindeutig bestimmt; denn[1] ist M der Mittelpunkt von k und H derjenige Punkt, für den DMCH ein Quadrat ist, so schneidet h die Quadratseiten DH und MD in inneren Punkten E bzw. G (das erste wegen $45^\circ < \sphericalangle \overline{MCR} = \sphericalangle \overline{MCE} < 90^\circ$, das zweite wegen $AR \perp CR$, also $h \perp CE$).

(5) Man konstruiert den Strahl aus R durch M und seinen Schnittpunkt U mit k.

(6) Man konstruiert den Strahl aus Q durch M und seinen Schnittpunkt T mit k.

b) Beweis der geforderten Eigenschaften:

Nach (2) und (4) ist ACRQ ein konvexes Viereck, mit einem Durchmesser AC von k als einer Seite und einem Halbkreis über diesem Durchmesser einbeschrieben. Zentralsymmetrisch bezüglich M liegt hierzu nach (5) und (6) das Viereck CAUT. Damit (und mit (1) ergibt sich PQRSTU als ein konvexes Sechseck, dessen sämtliche Eckpunkte auf k liegen.

Wegen (3), also $DE \parallel AC$, ist[2]

$$F(ACE) = F(ACD) = \frac{1}{2} F(ABCD).$$

Wegen (4), also $EQ \parallel AR$, ist

$$F(ARQ) = F(ARE).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} F(ACRQ) &= F(ACR) + F(ARQ) \\ &= F(ACR) + F(ARE) \\ &= F(ACE) \\ &= \frac{1}{2} F(ABCD) \end{aligned}$$

und somit wegen der genannten Zentralsymmetrie

$$\begin{aligned} F(PQRSTU) &= 2\, F(ACRQ) \\ &= F(ABCD). \end{aligned}$$

<u>Hinweis</u>: Nicht zum Ziel führt der Versuch, zwei Sechseck-Gegenecken, etwa R, U, als Endpunkte zu einem Durchmesser RU zu wählen und PQ, TS parallel und in gleichem Abstand x zu RU anzusetzen: Die Forderung, F(PQRSTU) = F(ABCD) durch Wahl von x zu erreichen, ist nicht durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal erfüllbar.

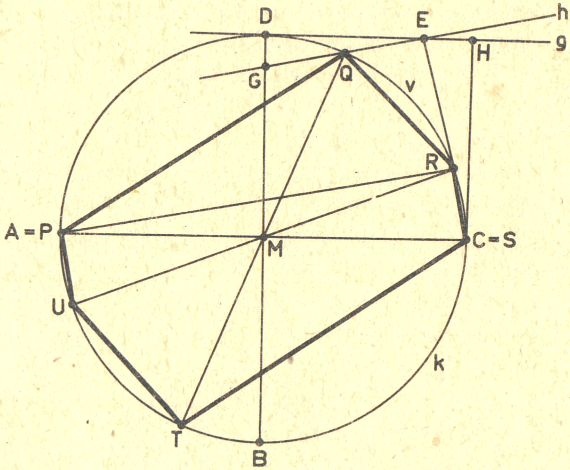

Abb. L 251042

---

1 Hat man in (2) [statt eine beliebige Wahl von R auf v anzugeben] beschrieben, wie eine einzelne konkrete Wahl getroffen werden soll (z.B. R auf v mit $\measuredangle CMR = 45^\circ$), so können Existenz und Eindeutigkeit des Schnittpunktes der durchgeführten Konstruktion entnommen werden.

2 Ist XY ... Z ein Polygon, so bezeichnet F(XY ... Z) seinen Flächeninhalt.

251043A)Lösung: 7 Punkte

Vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 erfüllen dann die geforderten Bedingungen, wenn sie die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders sind, dessen Umkugel K ist. Nun gilt für jedes regelmäßige Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ zwischen der Kantenlänge a und dem Umkugeldurchmesser d die Beziehung $d = a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Beweis hierzu[1]: Das Lot von P_1 auf die Seitenfläche $P_2P_3P_4$ hat deren Schwerpunkt S_1 als Fußpunkt und geht durch den Schwerpunkt S des Tetraeders. S_1 teilt die Strecke P_2M (wo M der Mittelpunkt von P_3P_4 ist) im Verhältnis 1:2; damit erhält man $\overline{P_2S_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$; das Tetraeder hat die Höhenlänge $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Der Schwerpunkt S des Tetraeders hat von jeder Seitenfläche den Abstand $\frac{h}{4}$, also von jeder Ecke den Abstand $\frac{3}{4}h$; somit beträgt der Umkugeldurchmesser $d = \frac{3}{2}h = a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Andere Beweismöglichkeit: Die Umkugel K eines Würfels $P_1Q_1P_2Q_2Q_3P_3Q_4P_4$ einer Kantenlänge c ist zugleich Umkugel des regelmäßigen Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$. Dieses hat die Kantenlänge $a = c\sqrt{2}$, während K den Durchmesser $d = c\sqrt{3}$ hat. Daraus folgt $d = a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Damit ist bewiesen, daß die folgende Konstruktion vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 der geforderten Art ergibt:

(1) Man konstruiert (auf dem Zeichenblatt B) eine Strecke DX der Länge $\overline{DX} = a = d\sqrt{\frac{2}{3}}$ (siehe unten).

(2) Man wählt einen Punkt P_1 auf K und konstruiert auf K den Kreis k_1 um P_1 mit der Zirkelspanne a.

(3) Man wählt einen Punkt P_2 auf k_1 und konstruiert auf K den Kreis k_2 um P_2 mit der Zirkelspanne a. Er schneidet den Kreis k_1 in zwei Punkten P_3, P_4.

Die Konstruktion (1) kann z. B. folgendermaßen ausgeführt werden:

(1.1) Man konstruiert einen Halbkreis c über DE.

(1.2) Man konstruiert auf DE denjenigen Punkt Y, für den $\overline{YE} = \frac{1}{3}\,\overline{DE}$ ist.

(1.3) Man errichtet die Senkrechte in Y auf DE und bringt sie zum Schnitt X mit c.

Dann wird nach dem Kathetensatz, wie behauptet, $\overline{DX} = d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

---

1 Die im Beweis verwendeten Aussagen können (z. T. auch noch kürzer, z. B. aus 250933) als bekannter Sachverhalt zitiert werden; andernfalls sind ausführlichere Nachweise erforderlich.

Bemerkung: Man vergleiche Abbildung L 251042. Faßt man diese (auf B ausgeführte) Zeichnung als Querschnitt durch K auf, etwa mit $P_1 = D$, $P_2 = X$, so liegen P_3 und P_4 auf demjenigen Kreis der Kugeloberfläche, dessen Projektion auf B die in Abbildung L 251042 gezeigte Sehne durch X und Y ist. Damit wird ersichtlich, daß dieselbe Konstruktion auch sogleich vermittels $h = \frac{2}{3}d$ begründet werden kann, ohne erst die Länge a rechnerisch als $a = d\sqrt{\frac{2}{3}}$ zu ermitteln.

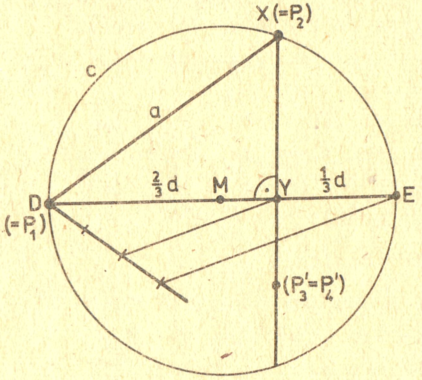

Abb. L 251043A

251043B) Lösung: 7 Punkte

Für jedes von (0, 0, 0) verschiedene Tripel (b_1, b_2, b_3) gilt: Entweder hat das Gleichungssystem keine Lösung, oder es hat eine von (0, 0, 0) verschiedene Lösung (x_1, x_2, x_3). Im letztgenannten Fall ist aber das Tripel $(-x_1, -x_2, -x_3)$ ebenfalls Lösung des Gleichungssystems und von (x_1, x_2, x_3) verschieden. Also kann (in jedem möglichen Fall für die $a_1, \ldots, a_4$) höchstens das Tripel $(b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0)$ zu einem Gleichungssystem mit genau einer Lösung führen. Über das Gleichungssystem mit $(b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0)$, d. h. über

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + x_3^2 = 0, \qquad (1)$$
$$x_2^2 + a_3x_3^2 = 0, \qquad (2)$$
$$x_2^2 + a_4x_3^2 = 0, \qquad (3)$$

gelten nun folgende Aussagen:

Jedenfalls ist $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ eine Lösung von (1), (2), (3). Ferner trifft für $a_1, \ldots, a_4$ jeweils genau einer der folgenden Fälle zu:

1. $a_1 = 0$. In diesem Fall gilt:
   Für jedes reelle t ist $(t, 0, 0)$ Lösung von (1), (2), (3).

2. $a_1 \neq 0$.

2.1. $a_3 \neq a_4$. Hierfür gilt:
Aus (2), (3) folgt $(a_3 - a_4)x_3^2 = 0$, also $x_3 = 0$ und damit aus (2), (1) weiter $x_2 = 0$, $x_1 = 0$.

2.2. $a_3 = a_4 > 0$. Dann gilt:
Wegen $a_3 > 0$ folgt aus (2), daß $x_2 = x_3 = 0$ sein muß, und damit aus (1) weiter $x_1 = 0$.

2.3. $a_3 = a_4 = 0$.

2.3.1. $a_1 > 0$.
Aus (2) folgt $x_2 = 0$ und dann wegen $a_1 > 0$ aus (1) weiter $x_1 = x_3 = 0$.

2.3.2. $a_1 < 0$.
Für jedes reelle t ist $(t, 0, t\sqrt{-a_1})$ Lösung.

<u>2.4.</u> $a_3 = a_4 < 0$.

<u>2.4.1.</u> $a_2a_3 = 1$.
Für jedes reelle t ist $(0, t\sqrt{-a_3}, t)$ Lösung.

<u>2.4.2.</u> $a_2a_3 > 1$, $a_1 < 0$.
Aus (1), (2) folgt $a_1a_3x_1^2 + (a_2a_3 - 1)x_2^2 = 0$.
Wegen $a_1a_3 > 0$ und $a_2a_3 - 1 > 0$ folgt hieraus $x_1 = x_2 = 0$ und damit aus (1) weiter $x_3 = 0$.

<u>2.4.3.</u> $a_2a_3 < 1$, $a_1 > 0$.
Wie im vorigen Fall gilt: Wegen $a_1a_3 < 0$ und $a_2a_3 - 1 < 0$ folgt $x_1 = x_2 = 0$ und damit $x_3 = 0$.

<u>2.4.4.</u> $a_2a_3 > 1$, $a_1 > 0$.
Für jedes reelle t ist $(t\sqrt{a_2a_3 - 1}, t\sqrt{-a_1a_3}, t\sqrt{a_1})$ Lösung.

<u>2.4.5.</u> $a_2a_3 < 1$, $a_1 < 0$.
Für jedes reelle t ist $(t\sqrt{1 - a_2a_3}, t\sqrt{a_1a_3}, t\sqrt{-a_1})$ Lösung.

Indem man noch die Fälle 2.4.2. und 2.4.3. zusammenfaßt, ergibt sich somit:
Liegt für die $a_1, \ldots, a_4$ einer der Fälle

(2.1.:)	$a_3 \neq a_4$, $a_1 \neq 0$
(2.2.:)	$a_3 = a_4 > 0$, $a_1 \neq 0$
(2.3.1.:)	$a_3 = a_4 = 0$, $a_1 > 0$
(2.4.2. oder 2.4.3.:)	$a_3 = a_4 < 0$, $a_1(1 - a_2a_3) > 0$

vor, so hat genau das Tripel $(b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0)$ die Eigenschaft, auf ein (in der Aufgabenstellung genanntes) Gleichungssystem mit genau einer reellen Lösung (x_1, x_2, x_3) zu führen. In allen anderen Fällen für die $a_1, \ldots, a_4$ gibt es kein Tripel (b_1, b_2, b_3) mit dieser Eigenschaft.

L 10;II XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

251044) Lösung: 6 Punkte

I. Wenn für eine von 0 verschiedene reelle Zahl r die Gleichung

$$\frac{2x}{r(x+r)} + \frac{1}{x-2r} = \frac{4x-r+6}{r(x-2r)(x+r)} \qquad (1)$$

eine reelle Lösung besitzt und wenn x eine solche ist, so folgt:

Es gilt

$$x \neq -r \qquad (2)$$

und $x \neq 2r$, (3)

da die in (1) auftretenden Brüche definiert sind. Ferner folgt aus (1):

$$2x(x-2r) + r(x+r) = 4x - r + 6,$$

$$x^2 - \frac{x}{2}(3r + 4) + \frac{1}{2}(r^2 + r - 6) = 0,$$

$$x = \frac{1}{4}(3r + 4) \pm \frac{1}{4}\sqrt{9r^2 + 24r + 16 - 8r^2 - 8r + 48},$$

$$x = \frac{1}{4}(3r + 4 \pm (r + 8)),$$

$$x = r + 3 \quad \text{oder} \quad x = \frac{r}{2} - 1. \qquad (4)$$

II. Umgekehrt gilt für jede von 0 verschiedene reelle Zahl r: Wenn eine reelle Zahl x sowohl (4) als auch (2) und (3) erfüllt, so ist x eine Lösung von (1).

Aus I. und II. folgt: Für jeweils eine reelle Zahl $r \neq 0$ ist die Anzahl aller Lösungen von (1) gleich der Anzahl aller derjenigen reellen Zahlen, die gleich r + 3 oder gleich $\frac{r}{2} - 1$ und außerdem von -r und von 2r verschieden sind. Nun ist

$r + 3 = \frac{r}{2} - 1$ äquivalent mit $r = -8$,
$r + 3 = -r$ äquivalent mit $r = -\frac{3}{2}$,
$r + 3 = 2r$ äquivalent mit $r = 3$,
$\frac{r}{2} - 1 = -r$ äquivalent mit $r = \frac{2}{3}$,
$\frac{r}{2} - 1 = 2r$ äquivalent mit $r = -\frac{2}{3}$.

Also gilt:

b) Genau eine reelle Lösung hat (1) genau für die Werte
$r = -8, \quad -\frac{3}{2}, \quad -\frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad 3.$

a) Genau zwei verschiedene reelle Lösungen hat (1) für alle anderen von 0 verschiedenen reellen Zahlen r.

c) Es gibt keine von 0 verschiedene reelle Zahl r, für die (2) keine reelle Lösung hat.

251045) Lösung: 6 Punkte

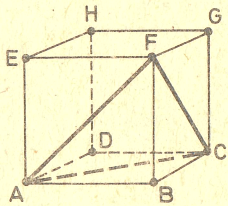

Abb. L 251045

a) Legt man die Schnittebene z. B. durch die Eckpunkte A, C, F eines Würfels ABCDEFGH (Abb. L 251045), so entsteht als Schnittfigur ein regelmäßiges Dreieck.

b) Legt man die Ebene parallel zu einer Seitenfläche des Würfels, so entsteht ein Quadrat.

c) Ein regelmäßiges Fünfeck kann nicht entstehen.

Beweis: Wenn eine Ebene e den Würfel in einem (nicht zur Strecke oder zum Punkt entarteten) Vieleck schneidet, so ist jede Seitenkante dieses Vielecks die Schnittstrecke von e mit (mindestens) einer Seitenfläche des Würfels. Dabei können verschiedene Seitenkanten des Vielecks nur dann als Schnittstrecke von e mit derselben Seitenfläche des Würfels darstellbar sein, wenn die Ebene e diese Seitenfläche enthält; in diesem Fall aber ist die Schnittfigur diese Seitenfläche, also kein Fünfeck.
Für jede Ebene e, die den Würfel in einem Fünfeck schneidet, muß es folglich fünf verschiedene Seitenflächen des Würfels geben, deren Schnitt mit e die Seitenkanten des Fünfecks sind.
Da es nun keine Menge aus mehr als drei paarweise nichtparallelen Seitenflächen des Würfels gibt, so folgt: Für jede Ebene e, die den Würfel in einem Fünfeck schneidet, befinden sich unter den genannten fünf Seitenflächen des Würfels auch zwei zueinander parallele. Da parallele Ebenen aber von e in zueinander parallelen Geraden geschnitten werden, hat das Fünfeck folglich (mindestens)[1] zwei zueinander parallele Seitenkanten. Dies ist für kein regelmäßiges Fünfeck der Fall, w.z.b.w.

[1] sogar zwei Paar paralleler Seitenkanten. Dies wird hier nicht benötigt.

251046) Lösung: 7 Punkte

Alle Glieder von F sind natürliche Zahlen kleiner als 10. Es gibt insgesamt nur endlich viele (nämlich 10^4) verschiedene 4-Tupel natürlicher Zahlen kleiner als 10. Unter den unendlich vielen Teilfolgen $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3})$ aus je vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern, die es in F gibt $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, muß daher mindestens eine mehrmals (sogar unendlich oft) vorkommen; d. h., es muß $k \neq m$, etwa $k < m$ geben, so daß die Teilfolgen $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3})$ und $(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3})$ miteinander übereinstimmen, d. h., daß

$$a_k = a_m,\ a_{k+1} = a_{m+1},\ a_{k+2} = a_{m+2},\ a_{k+3} = a_{m+3} \qquad (3)$$

gilt.

Aus (3) folgt nach (2), daß sowohl a_{k+4} als auch a_{m+4} die Einerziffer der Zahl $a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}$ ist; d. h., es folgt $a_{k+4} = a_{m+4}$. Wendet man dies wiederholt auf $k+1, k+2, k+3, \ldots$ (statt k) bzw. auf $m+1, m+2, m+3 \ldots$ (statt m) an, ergibt sich: In F wiederholen sich (spätestens) von a_k ab die Werte $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{m-1}$ periodisch.

Aus (3) folgt, wenn $(m >)\ k > 1$ ist, nach (2): Sowohl a_{k-1} als auch a_{m-1} sind jeweils natürliche Zahlen, die kleiner als 10 sind und die Eigenschaft haben, daß ihre Addition zu $a_k+a_{k+1}+a_{k+2}$ eine Zahl mit der Einerziffer a_{k+3} ergibt. Da eine Änderung von Zehnerziffern (solange der Bereich der natürlichen Zahlen nicht verlassen wird) an diesen Eigenschaften nichts ändert, so folgt: Wenn man von einer zweistelligen Zahl mit der Einerziffer a_{k+3} und beliebiger, aber genügend großer Zehnerziffer (z. B. genügt jede Zehnerziffer größer als 3) die Zahl $a_k+a_{k+1}+a_{k+2}$ subtrahiert, dann ist sowohl a_{k-1} als auch a_{m-1} gleich der Einerziffer des Subtraktionsergebnisses, d. h., es folgt $a_{k-1} = a_{m-1}$. Wendet man dies wiederholt auf $k-1, k-2, \ldots, 2$ (statt k) bzw. auf $m-1, m-2, \ldots, m-k+2$ (statt m) an, so ergibt sich:

Die periodische Wiederholung der Werte beginnt in der Folge F bereits vom ersten Gliede a_1 an.

Damit ist bewiesen: Es gibt noch eine weitere Teilfolge in F, die aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern besteht und (1, 9, 8, 6) lautet. (Es gibt sogar unendlich viele weitere derartige Teilfolgen.)

Anmerkung (wird vom Schüler nicht verlangt):
Die kleinste Zahl $m > 1$ mit $a_m = 1$, $a_{m+1} = 9$, $a_{m+2} = 8$, $a_{m+3} = 6$ ist $m = 1561$.