A 10;I

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>251031</u>

Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a;b)$ von ganzen Zahlen a und b, die die Gleichung
$a + b = (a - b)^2$ erfüllen!

<u>251032</u>

a) Es sei a eine beliebige positive reelle Zahl, und es sei f die im Intervall $0 \leq x \leq a$ (1)

durch $f(x) = \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}$ (2)

definierte Funktion. Beweisen Sie, daß f im Intervall (1) streng monoton fallend ist!

b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D, in dem durch (2) eine Funktion f definiert wird! Untersuchen Sie, ob f im gesamten Bereich D streng monoton fallend ist!

Hinweis: Eine Funktion f heißt genau dann in einem Bereich B streng monoton fallend, wenn für alle reellen Zahlen x_1, x_2 in B gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$.

<u>251033</u>

Aus 27 Würfeln mit der Kantenlänge a wird ein Würfel mit der Kantenlänge 3a zusammengesetzt. Jeder der 27 kleinen Würfel ist entweder völlig weiß oder völlig schwarz angestrichen. Beim Zusammensetzen soll auf jeder der sechs quadratischen Seitenflächen des großen Würfels ein Muster entstehen, das in jeder

A 10;I

Zeile und in jeder Spalte genau ein schwarzes und genau zwei weiße Quadrate enthält. Ermitteln Sie

a) die kleinste,

b) die größte

Anzahl schwarzer Würfel, mit der diese Forderungen erfüllbar sind!

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

251034

Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, daß sie die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllt:

(1) Die Zahl x hat, im Zweiersystem (System mit der Basis 2) geschrieben, genau zehn Stellen.

(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 1.

(3) Schreibt man x im Vierersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 0.

(4) Die Zahl x hat, im Fünfersystem geschrieben, genau vier Stellen.

(5) Schreibt man x im Zehnersystem, so steht an der letzten Stelle die Ziffer 2.

Beweisen Sie, daß es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und ermitteln Sie diese Zahl!

251035

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Darin sei F ein von B und C verschiedener Punkt der Strecke BC, und E sei ein von A und C verschiedener Punkt der Strecke AC.

Ferner sei P der Schnittpunkt der Strecken AF und BE.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen die Umkreise der drei Dreiecke AFC, EBC und PFB stets genau einen Punkt gemeinsam haben!

251036

Das Arbeitsblatt zeigt das Bild A'B'C'D'E'F'G'H' eines Quaders ABCDEFGH bei einer schrägen Parallelprojektion.

a) Konstruieren Sie das Bild S' des Schnittpunktes S der Strecke EC mit der Ebene, die durch A, F und H geht! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, daß der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt S' das Bild des genannten Punktes S ist!

A 10;II

b) Ermitteln Sie alle diejenigen Quader ABCDEFGH, für die S mit dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH zusammenfällt!

Arbeitsblatt:

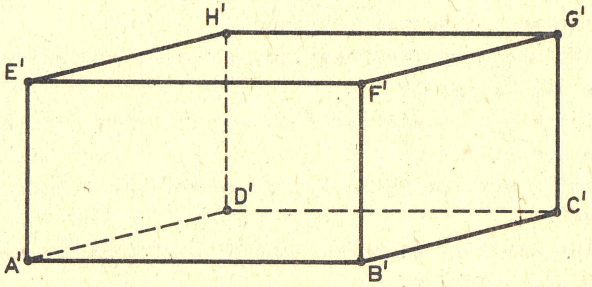

Abb. A 251036

XXV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

251031) Lösung: **5 Punkte**

Angenommen, (a,b) sei ein Paar von ganzen Zahlen, die die genannte Gleichung erfüllen, Da a und b ganze Zahlen sind, ist auch ihre Differenz eine ganze Zahl g.

Damit gilt $a - b = g$
sowie $a + b = g^2$
und damit

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(g^2 + g) = \frac{1}{2} g\,(g+1),\\ b &= \frac{1}{2}(g^2 - g) = \frac{1}{2} g\,(g-1).\end{aligned}\right\}\ (*)$$

Also erfüllen höchstens alle Paare $(\frac{1}{2}g\,(g+1);\ \frac{1}{2}g\,(g-1))$ mit ganzzahligem g die in der Aufgabe genannte Gleichung. Sie erfüllen diese Gleichung tatsächlich; denn es ist

$\frac{1}{2}g(g+1) + \frac{1}{2}g(g-1) = g^2 = (\frac{1}{2}g(g+1 - g+1))^2$, und sowohl $\frac{1}{2}g(g+1)$ als auch $\frac{1}{2}g(g-1)$ sind ganze Zahlen.

Anmerkung:
Die Darstellung von a und b in Abhängigkeit von dem Parameter g ist eindeutig. Durch die Darstellung (∗) wird jedes der geordneten Paare genau einmal erfaßt. (Diese Ausführungen werden vom Schüler nicht verlangt.)

251032) Lösung: **7 Punkte**

a) Aus $0 \leqq x_1 < x_2 \leqq a$ (3)

folgt

$$x_1^2 < x_2^2 \leqq a^2, \quad (4)$$

$$a^2 - x_1^2 > a^2 - x_2^2 \geqq 0, \quad (5)$$

$$\sqrt{a^2 - x_1^2} > \sqrt{a^2 - x_2^2}. \quad (6)$$

Multipliziert man hierin beide Seiten mit 2 und addiert 2a, so folgt weiter

$$a+x_1 + 2\sqrt{a+x_1}\sqrt{a-x_1} + a-x_1 > a+x_2 + 2\sqrt{a+x_2}\sqrt{a-x_2} + $$
$$+ a-x_2,$$

$$(\sqrt{a+x_1} + \sqrt{a-x_1})^2 > (\sqrt{a+x_2} + \sqrt{a-x_2})^2, \qquad (7)$$

und wegen $\sqrt{a+x_1} + \sqrt{a-x_1} > 0$ folgt hieraus

$$\sqrt{a+x_1} + \sqrt{a-x_1} > \sqrt{a+x_2} + \sqrt{a-x_2}, \qquad (8)$$

w.z.b.w.

b) Durch (2) wird für genau diejenigen reellen Zahlen x eine Zahl f(x) definiert, für die

$$a+x \geqq 0 \text{ und } a-x \geqq 0$$

gilt. Diese Bedingung ist gleichwertig mit

$$-a \leqq x \leqq a; \qquad (9)$$

also gibt (9) den gesuchten größtmöglichen Definitionsbereich D an. Da beispielsweise

$$-a < 0$$

und

$$f(-a) = \sqrt{2a} < 2\sqrt{a} = f(0)$$

gilt, ist f in D nicht streng monoton fallend. (Oder, noch einfacher: $-a < a$ und $f(-a) = f(a)$.)

<u>Hinweise zur Korrektur:</u>

Wird in a) die Rechnung entsprechend der heuristischen Reihenfolge (8),(7),...,(3) angegeben, so muß die erforderliche Schlußrichtung (3)$\Longrightarrow$(8) zusätzlich aus der Darstellung hervorgehen.
Logisch korrekt, wenn auch durch die indirekte Schlußweise überflüssig kompliziert, ist es dagegen, den Beweis zu a) als Schluß

von $0 \leqq x_1 \leqq a$, $0 \leqq x_2 \leqq a$ und $\sqrt{a+x_1} + \sqrt{a-x_1} \leqq \sqrt{a+x_2} + \sqrt{a-x_2}$

auf $x_1 \geqq x_2$

auszuführen.
Bei Rechenschritten des Quadrierens und Radizierens sind ausreichende Voraussetzungen zu überprüfen, wie im obigen Lösungsweg die angegebenen Nichtnegativitäts-Aussagen für (3)$\Longrightarrow$(4), (5)$\Longrightarrow$(6) und (7)$\Longrightarrow$(8).
In b) genügt (nach erfolgter Ermittlung von D) auch z. B. das Argument, daß f in $[-a; 0]$ wegen $f(-x) = f(x)$ streng monoton steigend ist.

<u>251033) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Für die auf den Seitenflächen des großen Würfels geforderten Muster gibt es als zueinander nicht kongruente Möglichkeiten genau diejenigen beiden, die in Abbildung L 251033 a und b dargestellt sind. Weiterhin gilt:

(1) Mit weniger als acht schwarzen Würfeln ist keine Zusammensetzung der geforderten Art möglich.

Beweis: Angenommen, es gäbe eine solche Zusammensetzung mit sieben oder weniger schwarzen Würfeln. In der "vorderen" (d. h. das Quadrat ABCD ausfüllenden; s. Abb. L 251033 c) Schicht wären dann genau drei schwarze Würfel, ebenso in der "hinteren" (das Quadrat EFGH ausfüllenden) Schicht. Für die "mittlere" (das Quadrat PQRS ausfüllende) Schicht verbliebe somit höchstens ein schwarzer Würfel. Wäre er, falls vorhanden, einer der drei nach Voraussetzung in der Zeile PQ auftretenden schwarzen Würfel, so enthielte die Zeile RS keinen schwarzen Würfel. Da dies den Voraussetzungen widerspricht, ist die Aussage (1) bewiesen.

(2) Mit mehr als elf schwarzen Würfeln ist keine Zusammensetzung der geforderten Art möglich.

Beweis: Angenommen, es gäbe eine solche Zusammensetzung mit zwölf oder mehr schwarzen Würfeln. In der "vorderen" und in der "hinteren" Schicht wären je genau drei schwarze Würfel, außerdem wäre möglicherweise der den Mittelpunkt des großen Würfels enthaltende kleine Würfel schwarz. Unter den acht Würfeln, die die Randlinie des Quadrates PQRS ausfüllen, befänden sich daher mindestens 12-3-3-1 = 5 schwarze Würfel. Unter ihnen könnte es nur vier geben, die keinen der Punkte P,Q,R,S enthalten. Also müßte mindestens einer dieser Punkte, o.B.d.A. der Punkt P, in einem schwarzen Würfel enthalten sein. Es verbleiben noch mindestens 5-1 = 4 schwarze Würfel; von ihnen dürfte nach Voraussetzung keiner mehr den Streckenzug SPQ erreichen. Das führt auf den Widerspruch, daß für diese mindestens 4 schwarzen Würfel nur noch die drei Plätze bei U, R und V frei wären; somit ist auch Aussage (2) bewiesen.

(3) Mit acht schwarzen Würfeln ist eine Zusammensetzung der geforderten Art möglich, wie Abbildung L 251033 d zeigt.

(4) Mit elf schwarzen Würfeln ist eine Zusammensetzung der geforderten Art möglich, wie Abbildung L 251033 e zeigt.

Aus (1) und (3) folgt: Die in a) gesuchte kleinste Anzahl ist 8;
aus (2) und (4) folgt: Die in b) gesuchte größte Anzahl ist 11.

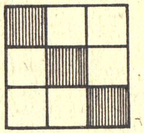

Abb. L 251033a

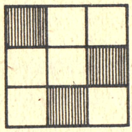

Abb. L 251033b

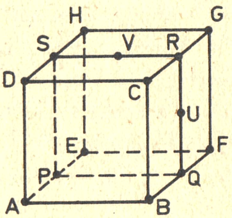

Abb. L 251033c

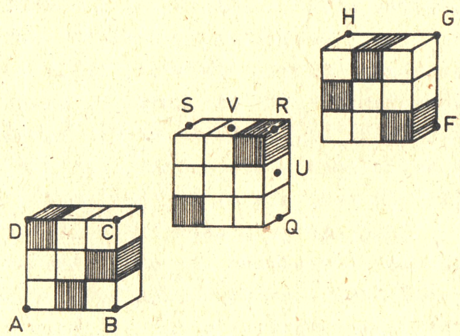

Abb. L 251033d

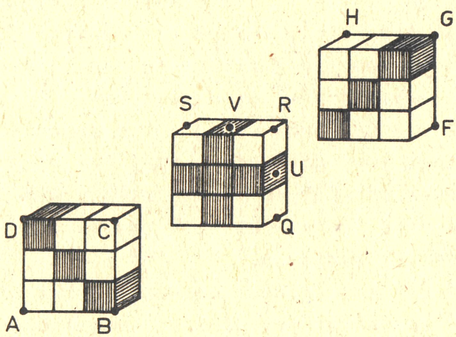

Abb. L 251033e

XXV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

251034) Lösung: 7 Punkte

I. Wenn eine natürliche Zahl x die Bedingungen (1) bis (5) erfüllt, so folgt:

Wegen (1) und (4) ist $2^9 \leqq x$ und $x < 5^4$, d. h.

$$512 \leqq x < 625. \tag{6}$$

Unter Beachtung von $2 \cdot 3^5 = 586$ und $3^6 = 729$ ergibt sich aus (6), daß x im Dreiersystem genau sechs Stellen hat, wobei an der ersten Stelle die Ziffer 2 steht.

Wegen (2) ist somit $x \geqq 2 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4$, d. h.

$$567 \leqq x. \tag{7}$$

Unter Beachtung von $2 \cdot 4^4 = 512$ und $3 \cdot 4^4 = 768$ ergibt sich aus (6), daß x im Vierersystem genau fünf Stellen hat, wobei an der ersten Stelle die Ziffer 2 steht.

Wegen (3) ist somit $x < 2 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3$, d. h.

$$x < 576. \tag{8}$$

Die Bedingungen (7), (8) und (5) werden nur von $x = 572$ erfüllt. Daher kann nur diese Zahl den Bedingungen (1) bis (5) genügen.

II. Sie genügt diesen Bedingungen; denn sie hat folgende Darstellungen:

Zweiersystem:	1000111100	(10 Stellen)
Dreiersystem:	210012	(Ziffer 1 an der zweiten Stelle)
Vierersystem:	20330	(Ziffer 0 an der zweiten Stelle)
Fünfersystem:	4242	(4 Stellen)
Zehnersystem:	572	(Ziffer 2 an der letzten Stelle)

Mit I. und II. ist der geforderte Beweis erbracht; die zu ermittelnde Zahl ist $x = 572$.

251035) Lösung: **6 Punkte**

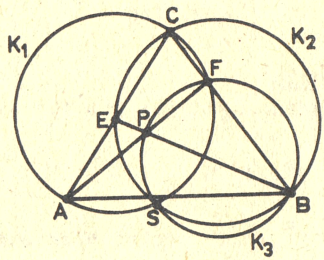

Abb. L 251035

Die Umkreise K_1 und K_2 der Dreiecke AFC bzw. EBC haben den Punkt C gemeinsam, während z. B. der auf K_2 gelegene Punkt E im Innern von K_1 und der auf K_1 gelegene Punkt F im Innern von K_2 liegt. Folglich haben K_1 und K_2 außer C genau einen weiteren Punkt S gemeinsam. Für ihn gilt

$\overline{\sphericalangle PFS} = \overline{\sphericalangle AFS}$ (da P zwischen A und F liegt[1])

$= \overline{\sphericalangle ACS}$ (nach dem Peripheriewinkelsatz, da F und C auf K_1 über dem Bogen $\overset{\frown}{AS}$ liegen)

$= \overline{\sphericalangle ECS}$ (da E zwischen A und C liegt)

$= \overline{\sphericalangle EBS}$ (nach dem Peripheriewinkelsatz, da C und B auf K_2 über dem Bogen $\overset{\frown}{ES}$ liegen)

$= \overline{\sphericalangle PBS}$ (da P zwischen E und B liegt).

Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegen somit P, F, S und B auf einem Kreis K_3; d. h., der Umkreis des Dreiecks PFB geht auch durch S.

Durch C geht er nicht, da er mit der Geraden durch B und C bereits die beiden von C verschiedenen Punkte B und F gemeinsam hat.

Also haben die Umkreise der Dreiecke AFC, EBC und PFB genau den Punkt S gemeinsam. Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

---

1 Diese und die folgenden Lageaussagen brauchen vom Schüler nicht genauer nachgewiesen zu werden.

251036) Lösung: **7 Punkte**

a) Konstruktion siehe Abbildung L 251036.

Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiert den Schnittpunkt M' der Strecken E'G' und F'H'.

(2) Man konstruiert den Schnittpunkt S' der Strecken A'M' und E'C'.

Beweis, daß der so konstruierte Punkt S' das Bild des in der Aufgabe genannten Punktes S ist:

Wegen AE $\parallel$ CG liegen A,E,C und G in einer Ebene η. Diese enthält mit E und G auch den Schnittpunkt M der Rechteckdiagonalen EG und FH; dabei hat M als Bild den in (1) konstruierten Schnittpunkt von E'G' und F'H'. Die Ebene ε durch A,F,H enthält mit F und H auch M. Da somit die Ebenen η und ε beide die Punkte A und M enthalten, ist die Gerade g durch A und M die Schnittgerade von η und ε.

Ferner enthält η die Strecke EC; folglich enthält g den Schnittpunkt S von EC und ε; dessen Bild S' ist somit der in (2) konstruierte Schnittpunkt der Bildgeraden g' mit der Strecke E'C'.

b) Da die Rechteckdiagonalen EG und FH einander halbieren, ist M der Mittelpunkt von HF, also AM Seitenhalbierende im Dreieck AFH. Ferner ist $\overline{EM} = \frac{1}{2}\overline{EG} = \frac{1}{2}\overline{AC}$; Daraus und aus dem Strahlensatz folgt $\overline{SM} : \overline{SA} = \overline{EM} : \overline{AC} = 1:2$. Also ist S der Schwerpunkt des Dreiecks AFH. Folglich ist S genau dann der Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH, wenn dessen Seitenhalbierenden zugleich Höhen sind. Das trifft genau im Fall $\overline{AF} = \overline{HF} = \overline{AH}$ zu.

Aus $\overline{AF} = \overline{HF}$ folgt $\triangle AEF \cong \triangle HEF$ (Kongruenzsatz sSW; dem rechten Winkel $\overline{\sphericalangle AEF} = \overline{\sphericalangle HEF}$ liegt als größtem Innenwinkel die längste Dreiecksseite gegenüber) und daher $\overline{AE} = \overline{HE}$. Umgekehrt gilt: Aus $\overline{AE} = \overline{HE}$ folgt $\triangle AEF \cong \triangle HEF$ (Kongruenzsatz wsw), also $\overline{AF} = \overline{HF}$.

Analog gilt: Aus $\overline{HF} = \overline{AH}$ folgt $\overline{EF} = \overline{AE}$ und umgekehrt.

Also ist S für genau diejenigen Quader ABCDEFGH der Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH, für die $\overline{EF} = \overline{AE} = \overline{HE}$ gilt, d. h. für genau diejenigen Quader, die Würfel sind.

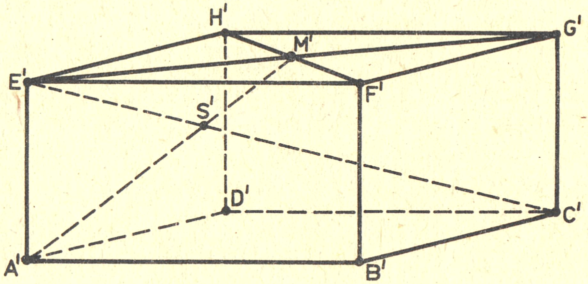

Abb. L 251036