XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 10

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

251021

Geben Sie alle Tripel (a, b, c) von ganzen Zahlen a, b, c mit

$$a \leqq b \leqq c \quad \text{und} \quad a \cdot b \cdot c = 1985$$

an!

251022

Man zeige, daß für beliebige positive reelle Zahlen a und b die Ungleichung

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+3b} < \sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}$$

gilt.

251023

Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge $\overline{AB} = 20$ cm und der Höhenlänge $\overline{CD} = 8$ cm.

Diesem Dreieck soll ein Rechteck EFGH so einbeschrieben werden, daß E und F auf AB, G auf BC und H auf AC liegen und daß dabei der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß ist.

Beweisen Sie, daß es genau ein Rechteck mit diesen Eigenschaften gibt!

Ermitteln Sie die Seitenlängen und den Flächeninhalt dieses Rechtecks!

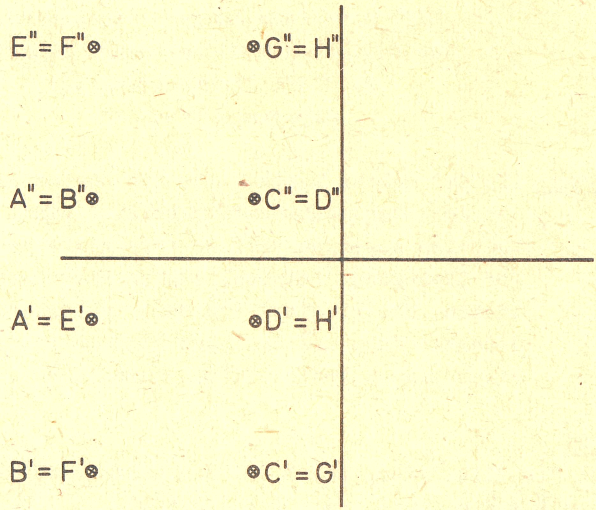

Abb. A 251024

Die Punkte A, B, C, D, E, F, G, H seien im Raum so gelegen, wie es die Abbildung A 251024 in Zweitafelprojektion zeigt.
Zeichnen Sie in Kavalierperspektive und in Zweitafelprojektion einen zusammenhängenden, ebenflächig begrenzten Körper, der genau diese acht Punkte als Eckpunkte besitzt, der kein Würfel ist, aber aus einem solchen durch "Herausschneiden" eines ebenflächig begrenzten Teilkörpers entstanden ist. Von Körperflächen verdeckte Kanten sind gestrichelt zu zeichnen.

Hinweis: Zwei Körper, die sich nur in einem Punkt oder einer Kante berühren, sollen nicht als zusammenhängend gelten.
Als Lösung genügt ein gezeichnetes Beispiel ohne Begründung.

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

251021) Lösung: 8 Punkte

Die Primfaktorzerlegung von 1985 lautet

$$5 \cdot 397 = 1985.$$

Nimmt man noch den Faktor 1 hinzu, so gibt es für natürliche Zahlen a, b, c genau die folgenden Darstellungen:

(1) $1 \cdot 5 \cdot 397 = 1985$

(2) $1 \cdot 1 \cdot 1985 = 1985.$

Da die Tripel aller ganzen Zahlen gesucht sind, sind noch die Fälle zu beachten, in denen genau zwei der Faktoren negatives Vorzeichen haben:

Aus (1) entstehen so genau die Darstellungen

$(-1)(-5) \cdot 397$, d. h. $a = -5$, $b = -1$, $c = 397$,

$(-1) \cdot 5 \cdot (-397)$, d. h. $a = -397$, $b = -1$, $c = 5$,

$1 \cdot (-5)(-397)$, d. h. $a = -397$, $b = -5$, $c = 1$.

Aus (2) entstehen genau die Darstellungen

$(-1) \cdot (-1) \cdot 1985$, d. h. $a = b = -1$, $c = 1985$,

$(-1) \cdot (-1985)$, d. h. $a = -1985$, $b = -1$, $c = 1$.

Insgesamt gibt es mithin genau folgende sieben Tripel, die die Aufgabenstellung erfüllen:

(1, 5, 397); (1, 1, 1985); (-5, -1, 397), (-397, -1, 5);
(-397; -5, 1); (-1, -1, 1985); (-1985, -1, 1).

251022) Lösung: 10 Punkte

Es gilt

$$a^2 + 3ab < a^2 + 3ab + 2b^2,$$ weil b positiv ist.

Da die Wurzelfunktion streng monoton steigt und beide Terme positiv sind, gilt

$$\sqrt{a^2 + 3ab} < \sqrt{a^2 + 3ab + 2b^2}.$$

Nach Multiplikation mit 2, Anwendung von $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ $(x,y > 0)$ und Addition von $2a + 3b$ erhält man

$$a + (a+3b) + 2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+3b} < (a+b) + (a+2b) + 2\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+2b}.$$

Unter Benutzung der binomischen Formel $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ ergibt sich daraus

$$(\sqrt{a} + \sqrt{a+3b})^2 < (\sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b})^2.$$

Weil aus $u^2 < v^2$ stets $|u| < |v|$ folgt, gilt weiter

$$|\sqrt{a} + \sqrt{a+3b}| < |\sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}|.$$

Da die Terme in den Beträgen positiv sind, gilt schließlich

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+3b} < \sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}\text{ , w.z.b.w.}$$

<u>Anderer Lösungsweg (indirekter Beweis):</u>

Angenommen, die angegebene Ungleichung würde nicht gelten, d. h., es wäre

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+3b} \geqq \sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}.$$

Da beide Seiten positiv sind, folgte dann durch Quadrieren

$$a + a+3b + 2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+3b} \geqq a+b + a+2b + 2\cdot\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+2b}.$$

Nach weiterem Umformen erhielte man

$$2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+3b} \geqq 2\cdot\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+2b},$$

$$\sqrt{a^2 + 3ab} \geqq \sqrt{a^2 + 3ab + 2b^2}.$$

Da beide Seiten positiv sind, könnte wieder quadriert werden, und es folgte

$$a^2 + 3ab \geqq a^2 + 3ab + 2b^2$$

und damit

$$0 \geqq 2b^2 \quad \text{also}$$

$$0 \geqq b^2.$$

Da ist offensichtlich falsch, da b positiv ist.

Damit ist auch die angenommene Ungleichung falsch und die Gültigkeit der gegebenen Ungleichung somit bewiesen.

<u>251023) Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

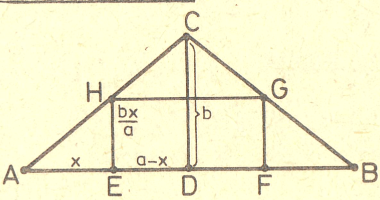

Abb. L 251023

Da die Höhe CD im gleichseitigen Dreieck ABC zugleich Seitenhalbierende ist, ist ihr Fußpunkt D der Mittelpunkt von AB; es gilt also $\overline{AD} = \overline{BD} = 10$ cm. Es sei $\overline{AD} = a$ und $\overline{DC} = b$ gesetzt (Abb. L 251023). Für jedes Rechteck EFGH, das dem Dreieck ABC (mit E und F auf AB, G auf BC und H auf AC) einbeschrieben ist, sei $\overline{AE} = x$ gesetzt. Wegen $EH \perp AB$ und $DC \perp AB$, also $EH \parallel DC$, folgt

aus dem Strahlensatz $\overline{EH} : \overline{DC} = \overline{AE} : \overline{AD}$, also $\overline{EH} = \frac{bx}{a}$.
Da EFGH ein Rechteck ist, gilt somit $\overline{FG} = \overline{EH} = \frac{bx}{a}$. Da auch $FG \parallel DC$ gilt, folgt aus dem Strahlensatz $\overline{BF} : \overline{BD} = \overline{FG} : \overline{DC}$ und damit $\overline{BF} = x$.
Hiernach ergibt sich $\overline{EF} = \overline{ED} + \overline{FD} = 2(a-x)$.
Der Flächeninhalt J des Rechtecks EFGH ist folglich

$$\begin{aligned} J &= 2(a-x)\,\frac{bx}{a} \\ &= \frac{2b}{a}(ax-x^2), \\ &= \frac{2b}{a}\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + ax - x^2\right), \\ &= \frac{ab}{2} - \frac{2b}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt: Für $x \neq \frac{a}{2}$ ist $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 > 0$, also $J < \frac{ab}{2}$; für $x = \frac{a}{2}$ ist $J = \frac{ab}{2}$.

Somit wird genau für dasjenige Rechteck EFGH, das sich mit $x = \frac{a}{2} = 5$ cm ergibt, der Flächeninhalt J am größten. Die Seitenlängen dieses Rechtecks sind $\overline{EF} = 2(a-x) = 10$ cm,
$\overline{EH} = \frac{bx}{a} = 4$ cm,
sein Flächeninhalt beträgt $J = 40\ \text{cm}^2$.

Andere Lösungsmöglichkeit:
Für $x_0 = \frac{a}{2}$ und $x_1 < \frac{a}{2}$ bzw. $x_2 > \frac{a}{2}$ ergänze man die Figur zu Abbildung L 251023a bzw. b. Die in einer Abbildung schraffierten Flächen sind dann einander inhaltsgleich, die punktierte Fläche hat folglich einen kleineren Flächeninhalt. Daraus ergibt sich, daß das mit x_0 erhaltene Rechteck größeren Flächeninhalt hat als die mit x_1 und x_2 erhaltenen Rechtecke.

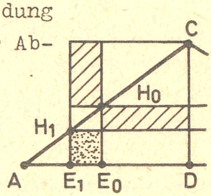

Abb. L 251023a

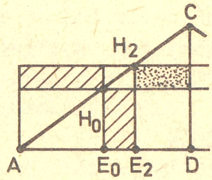

Abb. L 251023b

251024) Lösung: 10 Punkte

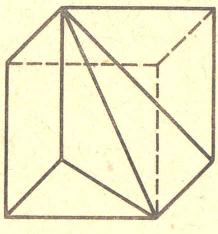
Abb. L 251024a

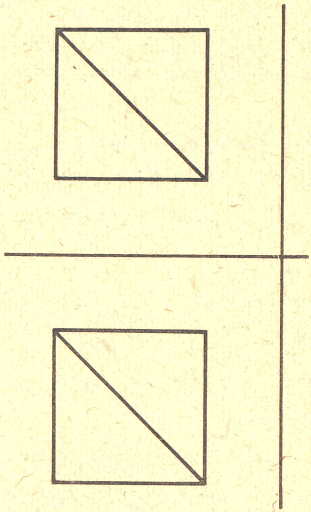

Abb. L 251024b

Empfehlung für die Punktverteilung
OKL 10 Gesamtpunktzahl: 40

251021	8 Punkte
Angabe der beiden Tripel aus natürlichen Zahlen	2 Punkte
Angabe der restlichen fünf Tripel	3 Punkte
Nachweis, daß es keine weiteren gibt	3 Punkte
251022	10 Punkte
Richtige Durchführung aller Umformungen	6 Punkte
Vollständige Begründung	4 Punkte
251023	12 Punkte
Richtiges Resultat	4 Punkte
Vollständige Begründung und Nachweis, daß Extremum vorliegt	8 Punkte
251024	10 Punkte
Zeichnung in Kavalierperspektive	5 Punkte
Zeichnung in Zweitafelprojektion	5 Punkte

(Für ungenaue oder unsaubere Zeichnung darf je 1 Punkt abgezogen werden.)