A 9;I

XXV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

250931

a) Beweisen Sie, daß es eine natürliche Zahl N gibt, für die die folgende Aussage (1) gilt!

(1) Für jede natürliche Zahl n, für die $n \geq N$ ist, kann eine Quadratfläche F in genau n Teilquadrate $T_1, \ldots, T_n$ zerlegt werden. (Dabei sollen die Flächen $T_1, \ldots, T_n$ die Fläche F vollständig ausfüllen; sie brauchen nicht untereinander kongruent zu sein.)

b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N, für die die Aussage (1) gilt!

250932

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (a, b) von zweistelligen Zahlen a und b, für die folgendes gilt:
Bildet man durch Hintereinanderschreiben von a und b in dieser Reihenfolge eine vierstellige Zahl z, so ist

$$z = (a + b)^2.$$

250933

Das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders sei V_T, das Volumen seiner Umkugel sei V_K.

A 9;I

Berechnen Sie das Verhältnis $V_K : V_T$ und runden Sie es ganzzahlig (d. h., ermitteln Sie die zu $V_K : V_T$ nächstgelegene ganze Zahl)! Dabei können die (auf eine bzw. zwei Dezimalen nach dem Komma genauen) Näherungswerte $\sqrt{3} \approx 1,7$ und $\pi \approx 3,14$ verwendet werden.

d

XXV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

250934

Die acht Zahlen 1, 2, ..., 8 sollen so auf die Eckpunkte eines Würfels verteilt werden, daß dabei folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedem Eckpunkt des Würfels wird genau eine der acht Zahlen zugeteilt, jede dieser Zahlen soll in der Verteilung vorkommen.

(2) Addiert man auf jeder Seitenfläche des Würfels die vier Zahlen an den Eckpunkten dieser Seitenfläche, so ergibt sich auf allen sechs Seitenflächen dieselbe Summe.

Es sollen möglichst viele Verteilungen der acht Zahlen auf die Eckpunkte so zusammengestellt werden, daß jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1), (2) erfüllt und daß keine zwei dieser Verteilungen zueinander kongruent sind, d. h. durch Drehung oder Spiegelung ineinander übergeführt werden können.
Ermitteln Sie die Anzahl der Verteilungen, die in einer solchen Zusammenstellung auftreten!

250935

In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck ABC sei A' der Fußpunkt der durch A gehenden Höhe, B' der Fußpunkt der durch B gehenden Höhe und S der Schnittpunkt dieser beiden Höhen.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets
$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AS} : \overline{SB'}$ gilt!

250936

a) Ist durch den Term

$$z = \sqrt{192 + 96 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{192 - 96 \cdot \sqrt{3}}$$

eine Zahl definiert?

b) Wenn dies der Fall ist, ist z rational?

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

250931) Lösung: **6 Punkte**

I. Es gilt: Für jede natürliche Zahl n, für die $n \geq 6$ ist, kann eine Quadratfläche F in genau n Teilquadrate zerlegt werden. (Beweis wie in 250913 ausgeführt[1].)

II. Es gilt: Eine Zerlegung einer Quadratfläche F in genau fünf Teilquadrate ist nicht möglich.

Beweis: Angenommen, eine Quadratfläche $F = ABCD$ der Seitenlänge $\overline{AB} = a$ wäre in genau fünf Teilquadrate $T_1, \ldots, T_5$ zerlegt. Da diese sämtlich kleinere Flächeninhalte, also auch kleinere Seitenlängen als $ABCD$ haben müssen, gehört jeder der Eckpunkte A, B, C, D zu einem anderen Teilquadrat als die anderen drei Eckpunkte; damit sind vier Teilquadrate, etwa T_1, T_2, T_3, T_4, erfaßt. Diejenigen Seiten dieser vier Teilquadrate, die auf jeweils einer der Seiten AB, BC, CD, DA des Quadrates $ABCD$ liegen, zerlegen entweder diese Seite vollständig in zwei Teilstrecken oder lassen im Innern dieser Seite eine Teilstrecke als Lücke frei. Da es außer den Teilquadraten T_1, T_2, T_3, T_4 noch genau ein Teilquadrat T_5 gibt, enthält genau eine der vier Seiten AB, BC, CD, DA eine solche Lücke, o.B.d.A. die Seite AB; die Bezeichnungen seien wie in Abbildung L 250931 gewählt.

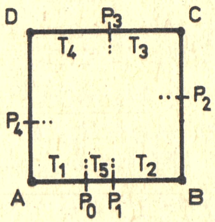

Abb. L 250931

Dann folgt

$$\overline{AP_0} + \overline{BP_1} = \overline{AP_4} + \overline{BP_2} = (a - \overline{DP_4}) + (a - \overline{CP_2})$$
$$= 2a - (\overline{DP_4} + \overline{CP_2}) = 2a - (\overline{DP_3} + \overline{CP_3}) = 2a - a$$
$$= a.$$

Das steht im Widerspruch zu $P_0 \neq P_1$; somit ist die Behauptung II. bewiesen.

Mit I. ist bewiesen, daß (1) für N = 6 gilt; damit ist der in a) geforderte Beweis erbracht.

Mit I. und II. ist bewiesen, daß N = 6 die in b) gesuchte kleinste natürliche Zahl ist, für die (1) gilt.

---

1 Vom Schüler wird entweder ein Zitat als (aus 250913) bekannte Aussage oder die Ausführung eines Beweises verlangt.

250932) Lösung: 7 Punkte

I. Wenn a, b und z die geforderten Eigenschaften haben, so gilt einerseits $10 \leqq a \leqq 99$ und $10 \leqq b \leqq 99$ sowie $z = 100a + b$ und $1000 \leqq z < 10000$, andererseits $z = (a+b)^2$. Daraus folgt

einerseits $31^2 = 961 < (a+b)^2 < 10000 = 100^2$, also

$$31 < a + b < 100, \quad (1)$$

andererseits $(a+b)^2 = 100a + b$,

$$(a+b)^2 - (a+b) = 99a,$$

$$(a+b) \cdot (a+b-1) = 99a. \quad (2)$$

Daher ist eine der beiden natürlichen Zahlen a+b, a+b−1 durch 3 teilbar.

1. Ist a+b durch 3 teilbar, so a+b−1 nicht. Also ist wegen (2) dann a+b sogar durch 9 teilbar.
   Wäre a+b auch durch 11 teilbar, so auch durch 99, woraus wegen (1) sogar a+b = 99 folgte. Aus (2) ergäbe sich damit $99 \cdot 98 = 99a$, also a = 98 und folglich b = 99−a = 1, im Widerspruch zu $b \geqq 10$.
   Also ist a+b nicht durch 11 teilbar, und folglich muß a+b−1 wegen (2) durch 11 teilbar sein; also läßt dann a+b bei Division durch 11 den Rest 1. Wegen (1) folgt, daß a+b eine der Zahlen 34, 45, 56, 67, 78, 89 ist. Von diesen ist aber nur 45 durch 9 teilbar. Aus (2) ergibt sich hierfür $45 \cdot 44 = 99a$, also a = 20 und folglich b = 25.
2. Ist a+b−1 durch 3 teilbar, so a+b nicht. Also ist dann a+b−1 sogar durch 9 teilbar. Wäre a+b−1 auch durch 11 teilbar, so auch durch 99; also ließe dann a+b bei Division durch 99 den Rest 1, was (1) widerspricht.

Somit muß a+b durch 11 teilbar und daher wegen (1) eine der Zahlen 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 sein. Hiernach ist a+b-1 eine der Zahlen 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98. Von diesen ist aber nur 54 durch 9 teilbar. Aus (2) ergibt sich hierfür $55 \cdot 54 = 99a$, also $a = 30$ und folglich $b = 25$.

Also können die gewünschten Eigenschaften nur vorliegen, wenn (a,b) eines der Paare (20,25), (30,25) ist.

II. Diese Paare haben die gewünschten Eigenschaften, wie aus $(20 + 25)^2 = 45^2 = 2025$, $(30 + 25)^2 = 55^2 = 3025$ ersichtlich ist.

Mit I. und II. ist bewiesen, daß genau die Paare (20,25) und (30,25) die geforderten Eigenschaften haben.

Hinweis zur Korrektur:

Falls ein Schüler auch das Paar (98,1) mit der ausdrücklich beigefügten Definition nennt, daß er 1 durch Anwendung der Schreibweise 01 den Begriff "zweistellige Zahl" zuordnet, so ist hierfür kein Punkt abzuziehen.

250933) Lösung: 7 Punkte

Wenn a die Kantenlänge, F der Flächeninhalt einer Seitenfläche und h die Höhenlänge des regelmäßigen Tetraeders ist, so gilt

$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ und $h = \sqrt{a^2 - (\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3})^2} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$, also[1]

$$V_T = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

Der Mittelpunkt der Umkugel fällt mit dem Schwerpunkt des regelmäßigen Tetraeders zusammen. Der Schwerpunkt und jeweils drei Eckpunkte des Tetraeders sind die Eckpunkte von vier paarweise zueinander kongruenten Teiltetraedern. In jedem von ihnen ist die vom Schwerpunkt des regelmäßigen Tetraeders ausgehende Höhe eine Teilstrecke einer von dessen Höhen; die jeweils zugehörige Seitenfläche ist für beide Höhen dieselbe. Die Summe der Volumina der Teiltetraeder ist das Volumen des regelmäßigen Tetraeders. Daraus folgt, daß die genannten Höhen der Teiltetraeder die Länge $\frac{h}{4}$ haben. Für den Umkugelradius r gilt somit[1] $h = r + \frac{h}{4}$, also $r = \frac{3}{4}h = \frac{a}{4}\sqrt{6}$; folglich ist

$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi a^3}{8}\sqrt{6}.$$

Das gesuchte Verhältnis beträgt somit

$$V_K : V_T = \frac{3\pi}{2}\sqrt{3}.$$

Mit $\pi \approx 3{,}14$ und $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ ergibt sich $3\pi \approx 9{,}42$, $\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}71$,

$$V_K : V_T \approx 8{,}007 \approx 8.$$

Ein <u>zweiter Lösungsweg</u> ergibt sich mit Hilfe der Feststellung, daß die Ecken, A,C,F,H eines Würfels W = ABCDEFGH (Abb. L 250933) ein regelmäßiges Tetraeder T bilden. W und T haben dieselbe Umkugel K.

Hat W die Kantenlänge c, so hat [T die Kantenlänge $a = c\sqrt{2}$ und] K den Radius $\frac{c}{2}\sqrt{3}$, also ist

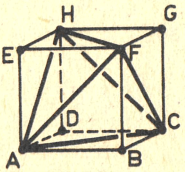

Abb. L 230933

$$V_K = \frac{\pi c^3}{2}\sqrt{3}.$$

Ferner ist $V_T = \frac{c^3}{3}$ (Beweis [wie im 1. Lösungsweg oder] durch Abschneiden der Pyramiden ABCF, ACDH, CFGH, AEFH von W) und

somit $V_K : V_T = \frac{3\pi}{2}\sqrt{3}$.

<u>Anmerkung:</u>

Daß 8 die zu $V_K : V_T$ nächstgelegene ganze Zahl ist, kann folgendermaßen bewiesen werden:[2]

Weil auf 2 Dezimalen genau $\pi \approx 3{,}14$ und auf 1 Dezimale genau $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ ist, folgt z. B.

$$\begin{aligned} 3{,}12 &< \pi < 3{,}16 \\ 9{,}36 &< 3\pi < 9{,}48 \\ 4{,}68 &< \frac{3\pi}{2} < 4{,}74 \\ 7{,}722 = 4{,}68 \cdot 1{,}65 &< \frac{3\pi}{2}\sqrt{3} < 4{,}74 \cdot 1{,}75 = 8{,}295. \end{aligned}$$

---

1 Zu der jeweils folgenden Formel (wie auch zu einigen der vorangehenden und der nachfolgenden Aussagen) ist es möglich, den betreffenden Sachverhalt (etwa wie oben, z. T. auch noch knapper) als bekannt zu zitieren; andernfalls sind ausführlichere Beweise erforderlich.

2 Ein solcher Beweis wird nicht vom Schüler verlangt.

XXV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

250934) Lösung: 7 Punkte

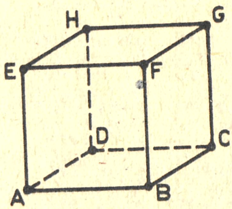

Abb. L 250934

Für jede Verteilung, die die Bedingungen (1), (2) erfüllt, gilt: Die Zahlen a, b, ..., h, die den Eckpunkten A, B, ..., H (s. Abb. L 250934) zugeteilt werden, sind die Zahlen 1, 2, ..., 8 in einer anderen Reihenfolge. Nach geeigneter Drehung wird jede solche Verteilung in eine mit

$$a = 1 \qquad (3)$$

übergeführt; ferner kann nach eventueller Spiegelung an der Ebene durch A,C,G,E oder durch A,F,G,D oder durch A,H,G,B, also nach eventueller Vertauschung von B,D oder von B,E oder von D,E

$$b < d < e \qquad (4)$$

erreicht werden. Da andererseits bei Festlegung von A,B,D,E durch (3),(4) keine Bewegung mehr möglich ist, die einen Punkt ändern würde, so ergibt sich eine Zusammenstellung der geforderten Art, wenn man (z. B.) alle diejenigen Verteilungen zusammenstellt, die den Bedingungen (1),(2) und (3),(4) genügen.
Da der Würfel genau sechs Seitenflächen hat und jeder Eckpunkt zu genau drei Seitenflächen gehört, gilt bei jeder Verteilung, die diesen Bedingungen genügt, für die in (2) genannte Summe s die Gleichung

$$6 \cdot s = 3 \cdot (a + b + \ldots + h) = 3 \cdot (1 + 2 + \ldots + 8) = 3 \cdot 36,$$

also s = 18.
Aus

$$a + b + c + d = 18 = c + d + g + h \qquad (5)$$

folgt weiter

$$a + b = g + h. \qquad (6)$$

Ebenso ergibt sich

$$c + d = e + f; \qquad (7)$$

außerdem ist nach (5) die Summe der beiden in (6) und (7) auftretenden Zahlen gleich 18.
Entsprechend sind

$$a + d = f + g \text{ und } b + c = e + h \qquad (8)$$

zwei Zahlen mit der Summe 18 sowie

$$a + e = c + g \text{ und } b + f = d + h \qquad (9)$$

zwei Zahlen mit der Summe 18.
Nach (3) und den Aussagen über (6),(7),(8),(9) kommen für $a+b$, $a+d$, $a+e$ nur die Werte 3, 4, ..., 9 in Betracht und jeweils zugehörig für $c+d$, $b+c$, $b+f$ nur die Werte 15, 14, ..., 9. Ferner müssen diese Werte gemäß (6),(7),(8),(9) jeweils auf zwei unterschiedliche Weisen als Summe zweier der Zahlen 1, ..., 8 darstellbar sein, wobei - jeweils für zusammengehörige Werte in solchen zweimal zwei Summendarstellungen - insgesamt alle acht Zahlen 1, ..., 8 vorkommen müssen. Damit scheiden für $a+b$, $a+d$, $a+e$ die Werte 3 und 4 aus; denn ihre einzige Darstellung als Summe zweier der Zahlen 1, ..., 8 ist $3 = 1+2$ bzw. $4 = 1+3$. Ferner scheidet der Wert 6 aus, da er und der zugehörige Wert 12 nur die Darstellungen $6 = 1+5 = 2+4$, $12 = 4+8 = 5+7$ haben, worin nicht alle Zahlen 1, ..., 8 vorkommen.
Somit verbleiben für $a+b$, $a+d$, $a+e$ nur die Werte 5,7,8,9, wegen (3) für b,d,e also nur 4,6,7,8. Nach (4) gibt es hierunter für

$(a;b;d)$ nur die Möglichkeiten	$(1;4;6)$,	$(1;4;7)$,	$(1;6;7)$.
Aus (5) folgt hierzu jeweils	$c=7$,	$c=6$,	$c=4$.
Damit verbleibt in allen drei Fällen nur		$e=8$	
und $a+b+e+f = 18$; $b+c+f+g = 18$ ergeben	$f=5$,	$f=5$,	$f=3$;
	$g=2$,	$g=3$,	$g=5$,
wonach nur noch	$h=3$,	$h\ 2$,	$h=2$

verbleibt.
Man bestätigt für diese drei Verteilungen, daß sie außer (1), (3),(4) und den schon durch die bisherige Rechnung erfüllten drei Teilforderungen von (2) auch die restlichen Bedingungen $a+d+e+h = c+d+g+h = e+f+g+h = 18$ erfüllen. Damit ist eine Zusammenstellung, wie sie in der Aufgabe genannt war, gefunden; die gesuchte Anzahl von Verteilungen beträgt 3.

Hinweis zur Korrektur:

Es gibt mehrere Möglichkeiten, durch Ansätze des Durchmusterns solche Verteilungen auszuscheiden, die (1),(2) nicht erfüllen. Hierbei muß (insbesondere bei tabellarischem Vorgehen) aus der Darstellung hervorgehen, daß alle in Frage kommenden Fälle erfaßt sind. Ferner muß nachgewiesen sein, daß die verbleibenden Fälle die Bedingungen (1),(2) vollständig erfüllen und daß sie paarweise inkongruent sind (soweit diese Nachweise nicht bereits im vorangehenden Ermittlungsweg enthalten sind).

250935) Lösung: 6 Punkte

Da das Dreieck spitzwinklig ist, liegt S im Inneren des Dreiecks. Die Dreiecke ASB' und BSA' sind nach dem Hauptähnlichkeitssatz ähnlich, da sie in den rechten Winkeln bei B' bzw. A' und den Scheitelwinkeln bei S übereinstimmen.

Daraus folgt $\overline{B'S} : \overline{AS} = \overline{A'S} : \overline{BS}$

und damit $\overline{B'S} : \overline{A'S} = \overline{AS} : \overline{BS}$. (1)

Nach (1) und dem Satz über Scheitelwinkel folgt nach dem Ähnlichkeitssatz sws die Ähnlichkeit der Dreiecke ABS und A'B'S.

Damit gilt (unter Berücksichtigung von (1))

$\overline{AB} : \overline{AS} = \overline{A'B'} : \overline{SB'}$

und damit

$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AS} : \overline{SB'}$, w.z.b.w.

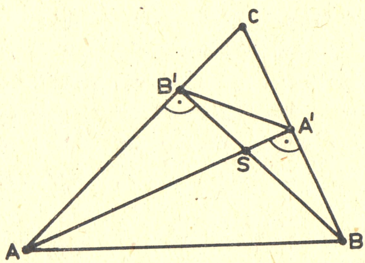

Abb. L 250935

2. Lösungsweg:

Nach dem Thalessatz liegen A' und B' auf dem Kreis mit AB als Durchmesser. Also gilt $\overline{\sphericalangle A'AB} = \overline{\sphericalangle BB'A'}$ (Peripheriewinkel), d. h. $\overline{\sphericalangle SAB} = \overline{\sphericalangle SB'A'}$. Hieraus und aus $\overline{\sphericalangle ASB} = \overline{\sphericalangle B'SA'}$ (Scheitelwinkel) (oder auch, ebenfalls als Peripheriewinkel, $\overline{\sphericalangle SBA} = \overline{\sphericalangle SA'B'}$) folgt $\triangle ABS \sim \triangle B'A'S$ und damit die Behauptung.

250936) Lösung: 7 Punkte

a) Wegen $\sqrt{3} < 2$ ist $96 \cdot \sqrt{3} < 96 \cdot 2 = 192$, also $192 - 96 \cdot \sqrt{3} > 0$.
Ferner ist $192 + 96 \cdot \sqrt{3} > 0$. Daher sind in dem angegebenen Term alle Radikanden positiv, also definiert er eine Zahl z.

b) Für diese Zahl z gilt

$$z^2 = 192 + 96 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{96(2 + \sqrt{3})}\ \sqrt{96(2 - \sqrt{3})} + 192 - 96 \cdot \sqrt{3}$$

$$= 2 \cdot (192 + \sqrt{96^2 \cdot (4 - 3)}) = 2 \cdot (192) + 96) = 2 \cdot 288 = 24^2,$$

[wegen $z > 0$ also $z = 24$]; damit ist z als rational nachgewiesen.

2. Lösungsweg zu b) (ohne Anwendung des Wurzelgesetzes $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$):

Es gilt $(12 + 4 \cdot \sqrt{3})^2 = 144 + 96 \cdot \sqrt{3} + 48 = 192 + 96 \cdot \sqrt{3}$,
wegen $12 + 4 \cdot \sqrt{3} > 0$ also

$$12 + 4 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{192 + 96 \cdot \sqrt{3}}. \qquad (1)$$

Ebenso gilt $(12 - 4 \cdot \sqrt{3})^2 = 192 - 96 \cdot \sqrt{3}$,
wegen $\sqrt{3} < 3$, also $12 - 4 \cdot \sqrt{3} = 4(3 - \sqrt{3}) > 0$ also

$$12 - 4 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{192 - 96 \cdot \sqrt{3}}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt durch Addition $24 = z$.