XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

250921

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) von natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a \leq b \leq c$ und

$$a \cdot b \cdot c = 19 \cdot 85$$

gilt!

250922

Es sei ABCD ein konvexes Viereck. Jede Seite dieses Vierecks werde durch zwei Teilpunkte in drei gleich lange Strecken geteilt.

Durch je zwei solche Teilpunkte, die ein und derselben Ecke des Vierecks ABCD am nächsten liegen, sei eine Gerade gezeichnet. Auf diese Art kann man genau vier Geraden zeichnen, deren Schnittpunkte ein weiteres Viereck STUV bilden.

Welches der beiden Vierecke ABCD bzw. STUV hat den größeren Flächeninhalt?

250923

Es seien a, b, x und y positive reelle Zahlen, und es gelte

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y}.$$

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y}$$

folgt!

A 9

250924

Untersuchen Sie, ob es rationale Zahlen a und b gibt, für die

$$\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$$

gilt!

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

250921) Lösung: 8 Punkte

Die Primfaktorzerlegung von $19 \cdot 85 = 1615$ lautet

$$1615 = 5 \cdot 17 \cdot 19.$$

Für die zu ermittelnden Tripel gibt es daher genau die folgenden Möglichkeiten:

1. Genau die beiden Zahlen a und b sind gleich 1.
   Das führt genau auf das Tripel (1, 1, 1615).
2. Genau die eine Zahl a ist gleich 1.
   Dann enthält b mindestens einen der Primfaktoren 5, 17, 19. Enthielte b mehr als einen dieser Faktoren, so wäre $b \geqq 5 \cdot 17 = 85$. Andererseits enthielte c dann nur noch höchstens einen dieser Faktoren, also wäre $c \leqq 19$. Das widerspricht der Bedingungen $b \leqq c$.
   Also enthält b genau einen der Primfaktoren 5, 17, 19, und c enthält die beiden anderen. Das führt (wegen $17 \cdot 19 = 323$ und $5 \cdot 19 = 135$) genau auf die Tripel
   (1, 5, 323), (1, 17, 135), (1, 19, 85).
3. Keine der drei Zahlen a, b, c ist gleich 1.
   Das führt genau auf das Tripel (5, 17, 19).

Somit sind genau die fünf in 1., 2., 3. angegebenen Tripel die gesuchten.

250922) Lösung: 12 Punkte

Die in der Aufgabe genannten Teilpunkte $P_1, P_2, \ldots, P_8$ und Schnittpunkte S, T, U, V sowie die Schnittpunkte X, Y von AC mit VS bzw. TU seien wie in Abbildung L 250922 bezeichnet.

Nach Voraussetzung gilt $\overline{BP_2} : \overline{BA} = \overline{BP_3} : \overline{BC} = 1 : 3$.

Nach Umkehrung des Strahlensatzes folgt hieraus $P_2P_3 \parallel AC$ und folglich $AX \parallel P_2S$.

L 9

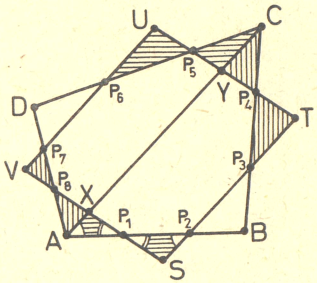

Abb. L 250922

Nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen folgt hieraus

$\overline{\sphericalangle P_1AX} = \overline{\sphericalangle P_1P_2S}$.

Da ferner $\overline{\sphericalangle AP_1X} = \overline{\sphericalangle P_2P_1S}$ (Scheitelwinkel) und

$\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2}$ (nach Voraussetzung)

ist, so folgt nach dem Kongruenzsatz (wsw) die Kongruenz der Dreiecke AP_1X und P_1P_2S und damit auch deren Flächengleichheit.

Analog folgt die Flächengleichheit der Dreiecke AP_8X und P_7P_8V, der Dreiecke CP_4Y und P_3P_4T sowie der Dreiecke CP_5Y und P_6P_5U.

Die Vierecksflächen ABCD und STUV haben die Achtecksfläche $P_1P_2 \ldots P_8$ gemeinsam. Vergleicht man die außerhalb dieser Achtecksfläche liegenden Teilflächen, so zeigt sich, daß der Inhalt des Vierecks ABCD um die Summe der Inhalte der Dreiecke P_2BP_3 und P_6DP_7 größer ist als der Inhalt des Vierecks STUV.

250923) Lösung: 10 Punkte

Aus $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$ folgt durch Multiplikation mit der positiven Zahl by

$$ay < bx. \qquad (1)$$

Addiert man a · b, so folgt

$$ay + ab < ab + bx,$$
$$a(b+y) < b(a+x).$$

Dividiert man dies durch die positive Zahl b(b+y), so folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y}. \qquad (2)$$

Addiert man zu (1) aber xy, so folgt

$$ay + xy < bx + xy,$$
$$(a+x)y < x(b+y).$$

Dividiert man dies durch die positive Zahl (b+y)y, so folgt

$$\frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y}. \qquad (3)$$

Mit (2) und (3) ist, wie gefordert, die Beziehung

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y}$$

hergeleitet.

250924) Lösung: 10 Punkte

Angenommen, es gäbe derartige Zahlen a und b. Aus dieser Annahme folgte dann

$$3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2,$$
$$2ab\sqrt{2} = 3 - a^2 - 2b^2.$$

(1) Im Fall $a \neq 0$, $b \neq 0$ folgte weiter

$$\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab},$$

also der Widerspruch[1], daß $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre. Daher scheidet dieser Fall aus.

(2) Im Fall $b = 0$ folgte aus $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ der Widerspruch[1], daß $\sqrt{3} = a$ eine rationale Zahl wäre. Also ist auch dieser Fall nicht möglich.

(3) Im Fall $a = 0$ folgte $3 = 2b^2$ mit einer rationalen Zahl b, also mit $b = \frac{m}{n}$, wobei m und n natürliche Zahlen wären. Das führte auf

$$3 = 2 \cdot \frac{m^2}{n^2},$$
$$3n^2 = 2m^2.$$

Da in der Primfaktorzerlegung der Quadratzahlen n^2 und m^2 jeder Primfaktor in gerader Anzahl vorkommt, ergäbe sich der Widerspruch, daß der Primfaktor 3 auf der linken Seite in ungerader Anzahl vorkommen müßte, auf der rechten Seite aber in gerader Anzahl.

Die Annahme hat somit in jedem Falle auf einen Widerspruch geführt; damit ist bewiesen, daß es keine rationalen Zahlen a, b mit $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ gibt.

---

1 Die Irrationalität von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ kann entweder als bekannter Sachverhalt zitiert oder (z. B. in entsprechender Weise wie oben in (3) durch Widerlegung von $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ bzw. $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$) bewiesen werden.

Empfehlung für die Punktverteilung
OKL 9 Gesamtpunktzahl: 40

250921	**8 Punkte**
Für jedes Tupel 1 Punkt	5 Punkte
Nachweis, daß alle Tupel erfaßt sind	3 Punkte
250922	**12 Punkte**
Geometrische Schlußfolgerungen	4 Punkte
Flächengleichheit der Dreiecke	4 Punkte
Vergleich der Gesamtflächen	4 Punkte
250923	**10 Punkte**
Teilungleichung (1)	5 Punkte
Teilungleichung (2)	2 Punkte
Hinweis auf positive Zahlen bei Division und Multiplikation	2 Punkte
Zusammenfassung zur Doppelungleichung	1 Punkt
250924	**10 Punkte**
Quadrieren der Ausgangsgleichung	2 Punkte
Fallunterscheidung erkennen	1 Punkt
Fälle mit $a \neq 0$, $b \neq 0$	
Auflösen nach $\sqrt{2}$	2 Punkte
Nachweis der Irrationalität von a, b	1 Punkt
Fälle mit $a = 0$	
Nachweis der Irrationalität von b	2 Punkte
Fälle mit $b = 0$	
Nachweis der Irrationalität von a	1 Punkt
Schlußfolgerung: Es gibt keine rationalen Zahlen a und b mit $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$	1 Punkt