XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>250831</u>

Beweise folgenden Satz:
Es gibt keine Quadratzahl, die bei Division durch 3 den Rest 2 läßt.

<u>250832</u>

Brigade Schulz spielt im "Tele-Lotto (5 aus 35)" nach einem sogenannten "vollmathematischen System mit n Zahlen". Darunter versteht man, wenn n eine natürliche Zahl mit $5 < n \leq 35$ ist, folgendes System:
Es werden von der Brigade genau n der Zahlen 1, 2, ..., 35 ausgewählt, und dann werden in der Menge dieser n Zahlen alle verschiedenen Teilmengen aus je fünf Elementen ermittelt. Jede dieser Teilmengen wird als Tip abgegeben.

a) Die Brigade spielt nach einem "vollmathematischen System mit 6 Zahlen". Bei der nachfolgenden Ziehung im Tele-Lotto stellt sich heraus, daß genau vier der fünf Gewinnzahlen unter den sechs von der Brigade in ihrem System verwendeten Zahlen vorkommen.
   Ferner werden nach dieser Ziehung folgende Gewinnquoten bekanntgegeben: Für jeden Tip mit genau drei richtig getippten Zahlen gibt es 20 M, für jeden Tip mit genau vier richtig getippten Zahlen gibt es 400 M, für jeden Tip mit fünf richtig getippten Zahlen 3000 M.
   Ermittle den hiermit zustandekommenden Gewinn der Brigade!

b) Die Brigade spielt nach einem "vollmathematischen System mit 7 Zahlen". Bei einer Ziehung wird festgestellt: Genau vier der fünf Gewinnzahlen kommen unter den sieben von der Brigade verwendeten Zahlen vor. Die Gewinnquoten sind dieselben wie in a).

Ermittle ebenfalls den Gewinn der Brigade!

<u>Hinweis:</u>

Die Kosten, d. h. der Spieleinsatz, sollen in beiden Aufgaben nicht berücksichtigt werden.

<u>250833</u>

Es sei g eine gegebene Gerade. Ferner seien zwei Punkte A, B gegeben, die beide nicht auf g liegen, deren Verbindungsstrecke AB aber g schneidet und nicht auf g senkrecht steht.

Für einen Streckenzug APQB seien folgende Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:

(1) Die Punkte P und Q liegen auf g.

(2) Die Gerade durch A und P ist parallel zur Geraden durch B und Q.

(3) Die Strecke PQ hat die Länge t = 6 cm.

a) Beweise, daß jeder Streckenzug APQB, der die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, durch eine Konstruktion (aus gegebenen g, A, B und der gegebenen Länge t = 6 cm) erhalten werden kann!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, daß jeder Streckenzug APQB, der nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

d) Wähle selbst eine Gerade g und Punkte A, B, wie oben beschrieben, und konstruiere dazu <u>alle</u> diejenigen Streckenzüge APQB, die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen! (Ein Beweis, daß <u>alle</u> verlangten Streckenzüge konstruiert wurden, wird nicht gefordert.)

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

250834

Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Eine Sehne von k, die nicht Durchmesser ist, sei AB. Ferner sei t die in A an k gelegte Tangente, und C sei der Fußpunkt des von B auf t gefällten Lotes.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Gerade durch A und B stets den Winkel $\sphericalangle CBM$ halbiert!

250835

Von Lew Nikolajewitsch Tolstoi (1828 bis 1910), einem bedeutenden russischen Schriftsteller, stammt folgende Aufgabe:

Schnitter sollen zwei Wiesen mähen. Am Morgen begannen alle, die größere Wiese zu mähen. Vom Mittag dieses Tages an teilten sie jedoch die Arbeit anders ein: Die Hälfte der Schnitter verblieb beim Mähen der ersten Wiese, die sie bis zum Abend fertig mähten. Die anderen Schnitter gingen zum Mähen der zweiten Wiese über, deren Flächeninhalt gleich dem der Hälfte der ersten war, und arbeiteten bis zum Abend. Nun blieb auf der zweiten Wiese ein Rest, für den ein Schnitter allein einen ganzen Tag benötigte. Wieviel Schnitter waren am ersten Tag bei der Arbeit?

Anmerkung: Es sei vorausgesetzt, daß jeder Schnitter an jedem Vormittag eine gleichgroße Fläche wie an jedem Nachmittag mäht und daß diese Arbeitsleistung aller Schnitter die gleiche ist.

250836

Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck PQR ist (Abb. A 250836).

Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kathetenlänge a des Dreiecks PQR.

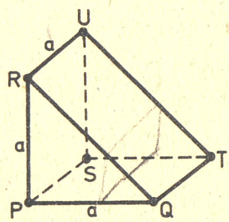

Abb. A 250836

A 8;II

Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratischen Seitenflächen F des Prismas verläuft und die das Prisma in zwei Teilkörper zerlegt, deren Volumina sich in irgendeiner Reihenfolge wie 9:16 verhalten.
Ermittle zu gegebenem a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

250831) Lösung: 5 Punkte

Ist n eine natürliche Zahl, so gilt entweder $n = 3k$ oder $n = 3k + 1$ oder $n = 3k + 2$, wobei k eine natürliche Zahl ist.

Ist nun $n = 3k$, so ist $n^2 = 9k^2$ durch 3 teilbar.
Ist jedoch $n = 3k + 1$, so läßt $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k)+1$ bei Division durch 3 den Rest 1.
Ist schließlich $n = 3k + 2$, so läßt $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ bei Division durch 3 ebenfalls den Rest 1.
In den betrachteten Fällen sind die Quadrate aller natürlichen Zahlen erfaßt. Der Rest 2 tritt also bei Division von Quadratzahlen durch 3 nicht auf, w.z.b.w.

250832) Lösung: 7 Punkte

a) In der Menge der sechs von der Brigade verwendeten Zahlen gibt es genau sechs verschiedene Teilmengen aus je fünf Elementen; diese Teilmengen entstehen nämlich, indem man jeweils eine der sechs Zahlen wegläßt.
Genau zwei der sechs Zahlen sind nicht Gewinnzahlen. Daher gibt es unter den von der Brigade abgegebenen Tips genau die beiden folgenden Sorten (1), (2):
(1) Tips mit genau einer Zahl, die nicht Gewinnzahl ist,
(2) Tips mit den beiden Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind.
Von der Sorte (1) gibt es genau zwei Tips, nämlich genau diejenigen, in denen die vier Gewinnzahlen und eine der beiden anderen Zahlen stehen.
Von der Sorte (2) sind folglich genau die vier anderen Tips des Systems.
Somit ergibt sich der Gewinn

$$2 \cdot 400\text{ M} + 4 \cdot 20\text{ M} = 880\text{ M}.$$

b) In der Menge der sieben von der Brigade verwendeten Zahlen gibt es genau 21 verschiedene Teilmengen aus je fünf Elementen.

Diese entstehen nämlich, indem man jeweils genau zwei der sieben Zahlen wegläßt, und das kann
entweder die erste der sieben Zahlen und eine der sechs übrigen sein (sechs Möglichkeiten)
oder die zweite und eine der fünf von der ersten und zweiten verschiedenen Zahlen (fünf Möglichkeiten)
oder die dritte und eine der vier von der ersten bis dritten verschiedenen Zahlen (vier Möglichkeiten)
oder die vierte und eine der drei von der ersten bis vierten verschiedenen Zahlen (drei Möglichkeiten)
oder die fünfte und eine der zwei von der ersten bis fünften verschiedenen Zahlen (zwei Möglichkeiten)
oder die sechste und die siebente Zahl (eine Möglichkeit);
die Anzahl dieser Teilmengen ist somit $6+5+4+3+2+1 = 21$.
Genau drei der sieben Zahlen sind nicht Gewinnzahlen. Daher gibt es unter den von der Brigade abgegebenen Tips genau die drei folgenden Sorten (1), (2), (3):
(1) Tips mit genau einer Zahl, die nicht Gewinnzahl ist,
(2) Tips mit genau zwei Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind,
(3) Tips mit den drei Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind.
Von der Sorte (1) gibt es genau drei Tips, nämlich genau diejenigen, in denen die vier Gewinnzahlen und eine der drei anderen Zahlen stehen.
Von der Sorte (3) gibt es genau sechs Tips, nämlich genau diejenigen, in denen außer den drei Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind, noch zwei der vier Gewinnzahlen stehen, und das sind
entweder die erste und eine der drei anderen Gewinnzahlen (drei Möglichkeiten)
oder die zweite und eine der beiden von der ersten und zweiten verschiedenen Gewinnzahlen (zwei Möglichkeiten)
oder die dritte und vierte Gewinnzahl (eine Möglichkeit).
Von der Sorte (2) sind folglich genau die $21-3-6 = 12$ anderen Tips des Systems.
Somit ergibt sich der Gewinn

$$3 \cdot 400\text{ M} + 12 \cdot 20\text{ M} = 1440\text{ M}.$$

Anmerkung:

Die wiederholt verwendete Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge kann auch als Hilfsaussage allgemein bewiesen oder als bekannter Sachverhalt zitiert werden, statt sie wie hier jeweils in den benötigten Einzelfällen herzuleiten.

Hinweis zur Korrektur:

Wird ein Lösungeweg unter tabellarischer Aufzählung von (jeweils zu diskutierenden) Fällen ausgeführt, so muß - für eine Wertung als vollständiger Lösungsweg - aus der Darstellung hervorgehen, daß die Aufzählung alle Fälle umfaßt.

250833) Lösung: **8 Punkte**

a)

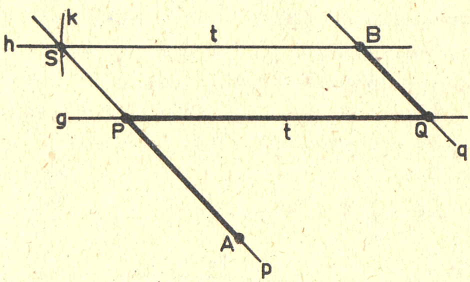

Abb. L 250833a

Wenn ein Streckenzug APQB die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt: Die Gerade p durch A und P ist nach (1) und den Voraussetzungen über g, A nicht parallel zu g; sie schneidet daher die Parallele h durch B zu g in einem Punkt S.
Für diesen gilt $SB \parallel PQ$ und nach (2) auch $PS \parallel QB$. Also ist PQBS ein Parallelogramm; hieraus und aus (3) folgt

$$\overline{SB} = \overline{PQ} = t.$$

Somit liegt S auf dem Kreis k um B mit dem Radius t = 6 cm.

Ferner folgt, daß P auf g und auf AS liegt und daß Q auf g und der Parallelen q durch B zu AS liegt.
Damit ist bewiesen, daß jeder Streckenzug APQB, der (1), (2), (3) erfüllt, durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

b) [1] Man konstruiert die Parallele h durch B zu g.

[2] Man konstruiert den Kreis k um B mit dem Radius t = 6 cm und bezeichnet einen Schnittpunkt von h und k mit S.

[3] Man konstruiert die Gerade p durch A und S und bezeichnet den Schnittpunkt von p und g mit P.

[4] Man konstruiert die Parallele q durch B zu p und bezeichnet den Schnittpunkt von q und g mit Q.

c) Für jeden Streckenzug APQB, der nach dieser Beschreibung konstruiert wird, gilt:
Nach [3] und [4] liegen P und Q auf g; d. h., (1) ist erfüllt.
Nach [3] und [4] gilt ferner $p \parallel q$; A und P liegen auf p; B und Q liegen auf q; also ist (2) erfüllt.
Nach [1], [3] und [4] ist PQBS ein Parallelogramm; hieraus und aus [2] folgt $\overline{PQ} = \overline{BS} = 6$ cm; d. h., (3) ist erfüllt.

d) Gefordert wird eine Konstruktion, die (wegen der Möglichkeit, in Konstruktionsschritt [2] jeden der beiden Schnittpunkte S_1, S_2 von h und k mit S zu bezeichnen) genau zwei Streckenzüge ergibt (in Abb. L 250833b mit AP_1Q_1B, AP_2Q_2B bezeichnet). Eine Begründung dieser Anzahl wird nicht verlangt, ebenfalls nicht die Feststellung, daß die beiden Streckenzüge nicht zueinander kongruent sind (wie sich aus der Voraussetzung ergibt, daß AB nicht senkrecht auf g steht).

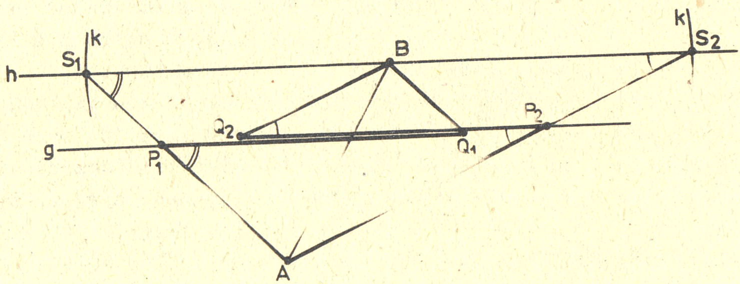

Abb. L 250833b

XXV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

250834) Lösung: **5 Punkte**

Der Berührungsradius MA steht senkrecht auf t. Deshalb und nach Voraussetzung stehen AM und CB senkrecht auf t und sind nach Umkehrung des Satzes über Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen parallel zueinander. Da $\sphericalangle$ MAB und $\sphericalangle$ ABC Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind, gilt

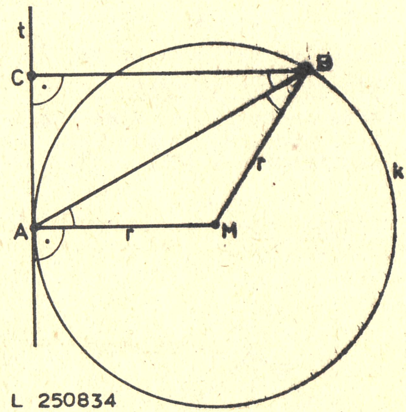

Abb. L 250834

$\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle MAB}$. (1)

Andererseits ist das Dreieck AMB gleichschenklig mit $\overline{AM} = \overline{MB}$ (Radius), und es gilt

$\overline{\sphericalangle MAB} = \overline{\sphericalangle ABM}$ (Basiswinkel). (2)

Aus (1) und (2) folgt unmittelbar $\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle ABM}$, und damit ist gezeigt, daß AB den Winkel $\sphericalangle$ CBM halbiert.

250835) Lösung: **7 Punkte**

Wenn am ersten Tag x Schnitter bei der Arbeit waren, so gilt:
Das Mähen der zweiten Wiese ist die halbe Tagesleistung von $\frac{x}{2}$ Schnittern, vermehrt um die Tagesleistung von einem Schnitter.
Das Mähen der ersten Wiese ist eine doppelt so große Leistung; es ist also die Tagesleistung von $\frac{x}{2}$ Schnittern, vermehrt um die Tagesleistung von zwei Schnittern.
Andererseits war das Mähen der ersten Wiese die halbe Tagesleistung von x Schnittern, vermehrt um die halbe Tagesleistung von $\frac{x}{2}$ Schnittern.

Daher gilt

$$\frac{x}{2} + 2 = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2},$$
$$\frac{x}{2} + 2 = \frac{3}{4}x,$$
$$2 = \frac{1}{4}x,$$
$$x = 8.$$

Folglich waren am ersten Tag acht Schnitter bei der Arbeit.

Hinweis zur Korrektur:

Eine Probe ist zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da die Existenz einer Anzahl, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, aus dem Aufgabentext hervorgeht.

250836) Lösung: 8 Punkte

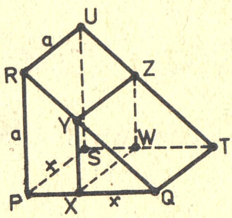

Abb. L 250836

Für jede Ebene, die (o.B.d.A.) parallel zur Seitenfläche F = PSRU verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper PXYRSWZU und XQYWTZ zerlegt (Abb. L 250836), gilt:

Die Teilkörper sind Prismen der gleichen Höhenlänge a; ihre Volumina verhalten sich also wie die Flächeninhalte ihrer Grundflächen PXYR und XQY. Dabei ist wegen XY ∥ PR, also (Stufenwinkel) $\overline{\sphericalangle QXY} = \overline{\sphericalangle QPR} = 90^\circ$ und $\overline{\sphericalangle XQY} = \overline{\sphericalangle PQR} = 45^\circ$, auch XQY ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Mit $\overline{XQ} = x$ ist folglich auch $\overline{XY} = x$, und XQY hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}x^2$. Somit hat PXYR den Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}x^2$.

Daher hat die Ebene E genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn entweder

$$(a^2 - x^2) : x^2 = 9:16 \text{ oder } x^2 : (a^2 - x^2) = 9:16$$

gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$16(a^2 - x^2) = 9x^2 \quad \text{bzw.} \quad 16x^2 = 9(a^2 - x^2),$$
$$16a^2 = 25x^2 \quad \text{bzw.} \quad 25x^2 = 9a^2$$

und dies wegen $a > 0$, $x > 0$ mit

$$x = \frac{4}{5}a \qquad \text{bzw.} \qquad x = \frac{3}{5}a.$$

Somit haben für den gesuchten Abstand $\overline{PX}$ genau die beiden Werte

$$a - x = \frac{1}{5}a \qquad \text{und} \qquad a - x = \frac{2}{5}a$$

die geforderte Eigenschaft.