A 8

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

250821

Ermittle diejenigen zwölf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, die die Eigenschaft haben, daß die Summe der beiden größten dieser Zahlen gleich der Summe der zehn übrigen ist!

250822

Beweise folgenden Satz:
Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, läßt bei Division durch 9 stets den Rest 2.

250823

Ein Sicherheitsschloß besitze vier Rädchen, die jeweils mit den Ziffern 1 bis 9 versehen sind. Nur durch Einstellen genau einer Zahlenkombination (an jedem Rädchen eine bestimmte Ziffer) läßt sich das Schloß öffnen. Der Besitzer eines solchen Schlosses hat sich beim Kauf die genaue Zahlenkombination nicht gemerkt. Er weiß nur noch, daß in der Zahlenkombination jede der Ziffern 1, 4 und 6 genau einmal vorkommt. Die Reihenfolge der einzelnen Ziffern ist ihm ebenfalls entfallen.

a) Wie viele verschiedene Einstellungen sind im ungünstigsten Falle für das Öffnen des Schlosses auszuführen?
b) Wie viele verschiedene Einstellungen wären höchstens nötig, wenn der Besitzer noch weiß, mit welchem Rädchen er die Ziffer 4 einstellen muß?

A 8

250824

Es sei ABC ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über BC als Durchmesser sei derjenige Halbkreis gezeichnet, der AB in einem Punkt D zwischen A und B schneidet (Abb. A 250824).

a) Beweise, daß die Gerade durch D und den Mittelpunkt E von BC senkrecht auf BC steht!

b) Berechne, wieviel Prozent der Fläche des Dreiecks ABC nicht von dem Halbkreis bedeckt sind! Der gesuchte Prozentsatz ist auf eine Dezimalstelle nach dem Komma anzugeben.

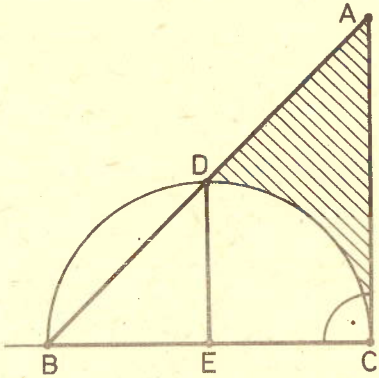

Abb. A 250824

Hinweis: Benutze den Näherungswert $\pi \approx 3{,}142$!

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

250821) Lösung: **8 Punkte**

Es sei x die kleinste der zwölf Zahlen. Dann gilt laut Aufgabenstellung

$$x+x+1+x+2+x+3+x+4+x+5+x+6+x+7+x+8+x+9 = x+10+x+11,$$
$$10x + 45 = 2x + 21,$$
$$x = -3.$$

Tatsächlich ist die Summe der zehn aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen von -3 bis 6 gleich der Summe der beiden darauffolgenden Zahlen 7 und 8.

$$-3-2-1+0+1+2+3+4+5+6 = 15 \quad \text{und} \quad 7 + 8 = 15.$$

Die Bedingungen der Aufgabe werden also genau von den Zahlen $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ und 8 erfüllt.

250822) Lösung: **8 Punkte**

Jede nicht durch 3 teilbare natürliche Zahl ist von einer der Formen $3k+1$, $3k+2$ mit $k \in N$. Hat eine solche Zahl die Eigenschaft, daß auch ihr Nachfolger nicht durch 3 teilbar ist, so muß sie von der Form $3k+1$ sein, da $3k+2$ die durch 3 teilbare Zahl $3k+3$ als Nachfolger hat. Der Nachfolger einer Zahl $3k+1$ ist $3k+2$, und das Produkt beider Zahlen ist

$$(3k+1) \cdot (3k+2) = 9k^2 + 3k + 6k + 2$$
$$= 9k^2 + 9k + 2$$
$$= 9 \cdot (k^2 + k) + 2.$$

Da k eine natürliche Zahl ist, ist auch $k^2 + k$ eine natürliche Zahl und $9 \cdot (k^2 + k)$ das Neunfache einer natürlichen Zahl, also durch 9 teilbar. $9 \cdot (k^2 + k) + 2$ läßt mithin bei der Division durch 9 den Rest 2, w.z.b.w.

L 8

250823) Lösung: 12 Punkte

a) Man beginne mit denjenigen Zahlenkombinationen, bei denen die Ziffern 1, 4, 6 in dieser Reihenfolge auftreten. Außer ihnen tritt noch jeweils eine nicht bekannte Ziffer x auf. Da x nicht mit den Ziffern 1, 4, 6 identisch ist, gibt es für x insgesamt sechs Möglichkeiten. Weil x sowohl an der 1., 2., 3. bzw. 4. Stelle der Einstellungsfolge stehen kann, gibt es für die Reihenfolge 1, 4, 6 somit insgesamt 4 · 6 = 24 Möglichkeiten.

Analog verfährt man bei den weiteren fünf möglichen Reihenfolgen 1, 6, 4; 4, 1, 6; 4, 6, 1; 6, 1, 4; 6, 4, 1.

Im ungünstigsten Falle sind also 6 · 24 = 144 Einstellungen auszuführen.

b) Man beginne mit denjenigen Zahlenkombinationen, bei denen die Ziffern 1, 6 in dieser Reihenfolge auftreten. Außer ihnen und der Ziffer 4 tritt noch jeweils eine nicht bekannte Ziffer x auf. Wieder gibt es für x insgesamt sechs Möglichkeiten. Weil für x genau diejenigen drei Plätze in der Einstellungsfolge frei sind, an denen die Ziffer 4 nicht steht, gibt es für die Reihenfolge 1, 6 somit insgesamt 3 · 6 = 18 Möglichkeiten.

Analog verfährt man bei der anderen Reihenfolge 6, 1.

Somit wären unter den Bedingungen der Aufgabe b) höchstens 2 · 18 = 36 Einstellungen nötig.

Anderer Lösungsweg zu b):

Man fasse in den 144 unter a) gefundenen Kombinationen stets diejenigen zu einer Gruppe zusammen, die durch Streichen der Ziffer 4 in dieselbe Kombination aus drei Ziffern übergehen. Jede solche Gruppe besteht aus genau vier Kombinationen; man erhält diese nämlich, indem man zu der Kombination aus drei Ziffern (ohne deren Reihenfolge zu ändern) wieder die Ziffer 4 hinzufügt, entweder an der ersten oder an der zweiten oder an der dritten oder an der vierten Stelle.

Wegen 144 : 4 = 36 gibt es also genau 36 Gruppen. In jeder Gruppe gibt es genau eine Kombination, bei der die Ziffer 4 am richtigen Platz steht. Also gibt es genau 36 solche Kombinationen.

250824) Lösung: 12 Punkte

a) Da BC Durchmesser des Halbkreises ist, ist der Mittelpunkt E von BC auch der Mittelpunkt des Halbkreises. Die Punkte B und D liegen auf dem Halbkreis; also gilt $\overline{EB} = \overline{ED}$. Daraus folgt $\overline{\sphericalangle DBE} = \overline{\sphericalangle BDE}$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BDE). Andererseits ist $\overline{\sphericalangle DBE} = \overline{\sphericalangle ABC} = 45^\circ$ (Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC). Nach dem Innenwinkelsatz folgt somit $\overline{\sphericalangle BED} = 180^\circ - (\overline{\sphericalangle DBE} + \overline{\sphericalangle BDE}) = 90^\circ$, d. h. die Behauptung $DE \perp BC$.

b) Wegen $\overline{\sphericalangle BED} = \overline{\sphericalangle BCA} = 90^\circ$ gilt nach der Umkehrung des Satzes über Stufenwinkel an geschnittenen Geraden $ED \parallel CA$, das Viereck ACED ist daher ein Trapez. Seine Höhenlänge ist zugleich der Radius $r = \overline{EC}$ des Halbkreises; die parallelen Seiten des Trapezes haben die Längen $\overline{ED} = r$ und $\overline{CA} = \overline{BC} = 2r$. Der Inhalt J der vom Halbkreis nicht bedeckten Fläche des Dreiecks ABC läßt sich als Differenz der Flächeninhalte des Trapezes ACED und eines Viertelkreises mit dem Radius r darstellen:

$$J = \frac{r + 2r}{2} \cdot r - \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{3}{2} r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{r^2}{4} (6 - \pi).$$

Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2.$$

Der gesuchte Prozentsatz beträgt daher

$$p = \frac{100\,J}{F} = \frac{25\,r^2\,(6 - \pi)}{2r^2} = 12{,}5 \cdot (6 - \pi).$$

Aus $\pi \approx 3{,}142$ ergibt sich $6 - \pi \approx 2{,}858$ und damit auf eine Dezimalstelle genau

$$p \approx 35{,}7.$$

Also sind 35,7 % der Fläche des Dreiecks ABC nicht von dem Halbkreis bedeckt.

Empfehlung für die Punktverteilung
OKL 8 Gesamtpunktzahl: 40

250821	**8 Punkte**
Angabe der zwölf Zahlen	2 Punkte
Nachweis, daß dies die einzigen Zahlen sind, die die Bedingungen erfüllen	4 Punkte
Probe	2 Punkte
250822	**8 Punkte**
Feststellung, daß die Zahl die Form 3k+1 hat	4 Punkte
Beweis, daß das Produkt (3k+1)(3k+2) bei Division durch 9 den Rest 2 läßt	4 Punkte
250823	**12 Punkte**
a) Ergebnis	2 Punkte
Begründete Herleitung	4 Punkte
b) Ergebnis	2 Punkte
Begründete Herleitung	4 Punkte
250824	**12 Punkte**
a)	6 Punkte
b) Flächeninhalt ist Differenz von Flächeninhalten	4 Punkte
Berechnung und Feststellung des Prozentsatzes	2 Punkte