A 7

XXV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 7

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

250721

Annett, Birgit und Cornelia haben in der letzten Klassenarbeit unterschiedliche Leistungen gezeigt; denn eine dieser Schülerinnen erhielt die Note 1, eine andere die Note 2 und die dritte die Note 3. Kerstin, eine Klassenkameradin, erzählt zu Hause: "Annett hat keine 1, Birgit keine 2, aber Cornelia hat eine 2."
Es stellt sich jedoch heraus, daß sich Kerstin bei genau zwei dieser drei Aussagen geirrt hatte.
Kann man aus diesen Angaben die Noten der einzelnen Schülerinnen eindeutig ermitteln? Ist dies der Fall, so gib die Notenverteilung an!

250722

Ein Quader habe das Volumen $V_1 = 0{,}217\ dm^3$, die Kanten seiner Grundfläche seien 12 cm bzw. 60 mm lang.
Von einem zweiten Quader sei bekannt, daß er die gleiche Höhe wie der erste Quader hat und daß die längere Kante seiner Grundfläche noch um 2 cm länger ist als die längere Kante der Grundfläche des ersten Quaders und die kürzere noch um 10 mm kürzer ist als die kürzere des ersten Quaders.
Berechne die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader und gib sie in Quadratzentimetern an!

A 7

250723

Es sei ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC = \alpha > 90^\circ$. Ferner sei H der Schnittpunkt der Geraden, auf denen die Höhen dieses Dreiecks liegen.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\sphericalangle BHC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB$$

gilt!

250724

a) Gegeben seien die drei Ziffern 2, 7 und 9. Aus ihnen sollen alle diejenigen dreistelligen Zahlen gebildet werden, die jede dieser drei Ziffern genau einmal enthalten.
   Zeige, daß die Summe aus allen diesen dreistelligen Zahlen durch 111 teilbar ist!

b) Gegeben sind drei paarweise verschiedene Ziffern, von denen keine die Ziffer 0 ist.
   Beweise, daß die Summe aus allen denjenigen dreistelligen Zahlen, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten, stets durch 111 teilbar ist!

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

250721) Lösung: 10 Punkte

Wäre Kerstins erste und zweite Aussage falsch und die dritte wahr, dann hätten Birgit und Cornelia eine 2, was der Voraussetzung widerspricht, daß die drei Schülerinnen unterschiedliche Noten haben. Wäre Kerstins erste und dritte Aussage falsch und die zweite wahr, dann hätte Annett eine 1, Birgit und Cornelia keine 2, was der Voraussetzung widerspricht, daß die Note 2 erteilt wurde.
Damit bleibt nur noch die Möglichkeit: Kerstins zweite und dritte Aussagen sind falsch, und die erste Aussage ist wahr. Das führt auf die Notenverteilung: Birgit 2, Annett (daher keine 2 und auch) keine 1, also Annett 3; und folglich Cornelia 1. Damit sind die Noten eindeutig ermittelt.

Anderer Lösungsweg:

Man notiert alle möglichen Notenverteilungen und prüft in jedem Falle, welche der Aussagen von Kerstin wahr (w) und welche falsch (f) sind.

Note	Annett	1	1	2	2	3	3
	Birgit	2	3	1	3	1	2
	Cornelia	3	2	3	1	2	1
Aussage	(1)	f	f	w	w	w	w
	(2)	f	w	w	w	w	f
	(3)	f	w	f	f	w	f

Nur in der letzten Spalte sind genau zwei Aussagen von Kerstin falsch, also ist eindeutig ermittelt, daß nur diese Verteilung den Angaben entspricht.

250722) Lösung: **10 Punkte**

Für den ersten Quader gilt:

Seine längere Grundkante beträgt $a_1 = 12$ cm, seine kürzere Grundkante $b_1 = 6$ cm. Sein Volumen ist $V_1 = 216\ \text{cm}^3$; wegen $216 : (12 \cdot 6) = 3$ beträgt seine Höhe daher $h_1 = 3$ cm.

Für den zweiten Quader gilt:

Seine längere Grundkante beträgt $a_2 = 14$ cm, seine kürzere Grundkante $b_2 = 5$ cm und seine Höhe $h_2 = h_1 = 3$ cm.

Der Oberflächeninhalt des ersten Quaders beträgt somit

$A_1 = 2\,(12 \cdot 6\ \text{cm}^2 + 12 \cdot 3\ \text{cm}^2 + 3 \cdot 6\ \text{cm}^2) = 252\ \text{cm}^2$.

Der Oberflächeninhalt des zweiten Quaders beträgt

$A_2 = 2\,(14 \cdot 5\ \text{cm}^2 + 14 \cdot 3\ \text{cm}^2 + 5 \cdot 3\ \text{cm}^2) = 254\ \text{cm}^2$.

Die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader beträgt somit $2\ \text{cm}^2$.

250723) Lösung: **10 Punkte**

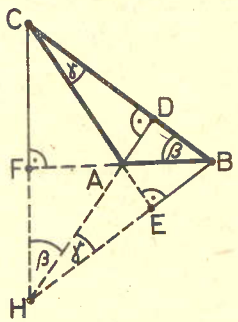

Abb. L 250723

Es seien D, E bzw. F die Fußpunkte der zu A, B bzw. C gehörenden Höhen, ferner sei $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$. Da das Dreieck ABC bei A stumpfwinklig ist, also bei B und C spitze Innenwinkel hat, liegt D auf der Seite BC, während E, F und H außerhalb des Dreiecks liegen (Abb. L 250723).

Hiernach gilt $\sphericalangle DCH = \sphericalangle FCB$. Ferner ist, da D und F Höhenfußpunkte sind, $\sphericalangle CDH = \sphericalangle CFB = 90^\circ$. Folglich stimmen die Dreiecke CDH und CFB in zwei Innenwinkeln überein; nach dem Innenwinkelsatz gilt daher auch $\sphericalangle DHC = \sphericalangle FBC$. Wegen der Lage von F ist hierbei $\sphericalangle FBC = \sphericalangle ABC = \beta$; damit ist

$$\sphericalangle DHC = \beta \tag{1}$$

bewiesen.

Entsprechend beweist man durch Betrachtung der Dreiecke BDH und BEC

$$\sphericalangle DHB = \gamma. \tag{2}$$

Schließlich gilt wegen der Lage von D zwischen B und C die Gleichung

$$\sphericalangle BHC = \sphericalangle DHB + \sphericalangle DHC$$

und somit nach (1) und (2)

$$\overline{\sphericalangle BHC} = \beta + \gamma,$$

w.z.b.w.

Anderer Lösungsweg:

Wegen der Lage von E, F und H ist

$$\overline{\sphericalangle BHC} = \overline{\sphericalangle EHF} \qquad (3)$$

eine Innenwinkelgröße im Viereck AEFH. Dieses Viereck hat bei E und F rechte Winkel. Aus dem Satz über die Winkelsumme im Viereck folgt daher

$$\overline{\sphericalangle EHF} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle EAF}. \qquad (4)$$

Ferner ist $\sphericalangle EAF$ Scheitelwinkel zu $\sphericalangle BAC$, also ebenso groß wie dieser. Hieraus und aus dem Innenwinkelsatz für das Dreieck ABC folgt weiter

$$180^\circ - \overline{\sphericalangle EAF} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle BAC} = \beta + \gamma. \qquad (5)$$

Aus (3), (4), (5) ergibt sich $\overline{\sphericalangle BHC} = \beta + \gamma$, w.z.b.w.

Hinweis zur Korrektur: Die benötigten Lageaussagen kann der Schüler einer (genügend genau gezeichneten) Abbildung entnehmen; ein Beweis solcher Aussagen wird nicht verlangt, sie sind aber für die betreffenden Beweisstellen zu vermerken.

250724) Lösung: 10 Punkte

a) Aus den Ziffern 2, 7, 9 lassen sich genau die folgenden sechs dreistelligen Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten:

279, 297, 729, 792, 927, 972.

Die Summe dieser sechs Zahlen beträgt 3996. Wegen $3996 = 36 \cdot 111$ ist diese Summe durch 111 teilbar.

b) Es seien a, b, c drei paarweise verschiedene Ziffern, unter denen sich nicht die Ziffer 0 befindet. Dann lassen sich genau die folgenden sechs dreistelligen Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten:

$100a + 10b + c$, $100a + 10c + b$, $100b + 10a + c$,
$100b + 10c + a$, $100c + 10a + b$, $100c + 10b + a$.

Die Summe dieser sechs Zahlen beträgt

$$222a + 222b + 222c. \qquad (1)$$

Wegen $222 = 2 \cdot 111$ ist jede der drei Zahlen $222a$, $222b$, $222c$ durch 111 teilbar, mithin auch ihre in (1) genannte Summe, w.z.b.w.

Hinweis: Man kann auch zuerst Aufgabe b) lösen. Als Beweis für die in a) zu zeigende Aussage genügt dann die Feststellung, daß sie als Spezialfall in der bei b) bewiesenen Aussage enthalten ist.

Empfehlung für die Punktverteilung
OKL 7 Gesamtpunktzahl: 40

250721	10 Punkte
Angabe der richtigen Noten	4 Punkte
Vollständige und korrekte Herleitung	6 Punkte
250722	10 Punkte
Angabe der richtigen Differenz	3 Punkte
Vollständige und korrekte Herleitung	7 Punkte
250723	10 Punkte
Vollständige Planfigur	1 Punkt
Benötigte Feststellungen	5 Punkte
Angabe aller für die Ableitung dieser Feststellungen benötigten Begründungen	4 Punkte
250724	10 Punkte
a) Angabe der sechs Zahlen	2 Punkte
Berechnung der Summe und Nachweis der Teilbarkeit	2 Punkte
b) Korrekte Darstellung der sechs Zahlen durch Variable	3 Punkte
Berechnung der Summe und Nachweis der Teilbarkeit	3 Punkte