XXV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 6

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

250621

Auf einem (3 x 3)-Spielbrett (Abb. A 250621) sind sechs Spielsteine so aufzustellen, daß jede waagerechte und jede senkrechte Reihe genau zwei Steine enthält. Auf jedem Feld des Spielbrettes darf höchstens ein Spielstein stehen.

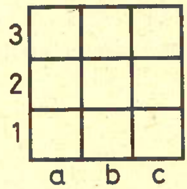

Abb. A 250621

Zeichne alle möglichen Stellungen für diese sechs Spielsteine! Eine Begründung wird nicht verlangt.

250622

Gesucht sind vier Zahlen mit folgenden Eigenschaften:
(1) Die Summe der vier Zahlen beträgt 60.
(2) Es ergibt sich viermal dasselbe Ergebnis, wenn man
  (2.1.) zur ersten Zahl 4 addiert,
  (2.2.) zur zweiten Zahl 3 addiert,
  (2.3.) von der dritten Zahl 2 subtrahiert,
  (2.4.) von der vierten Zahl 1 subtrahiert.

Ermittle aus diesen Forderungen vier solche Zahlen! Überprüfe, ob die von dir gefundenen Zahlen die geforderten Eigenschaften haben!

250623

Es sei ABCD ein Quadrat mit der Seitenlänge 14 cm.
Die Punkte E, F, G und H seien die Mittelpunkte der Quadratseiten. Dabei liege E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA.

A 6

a) Konstruiere dieses Quadrat und verbinde die Mittelpunkte E und F, F und G, G und H sowie H und E durch Strecken!

b) Ermittle den Flächeninhalt der Fläche EFGH!

<u>250624</u>

Anke, Bernd und Claudia wollen 21 Limonadeflaschen, von denen 7 voll, 7 halbvoll und 7 leer sind, untereinander verteilen. Dabei soll jedes Kind die gleiche Anzahl Flaschen und auch gleich viel Limonade erhalten, und es soll nichts umgegossen werden. Ferner soll Anke nicht weniger volle Flaschen als Bernd bekommen, und Bernd soll nicht weniger volle Flaschen als Claudia bekommen.

a) Gib zwei Verteilungen an, die diese Bedingungen erfüllen!

b) Weise nach, daß es keine weiteren Verteilungen geben kann, die diese Bedingungen erfüllen!

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 6

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

250621) Lösung: 6 Punkte

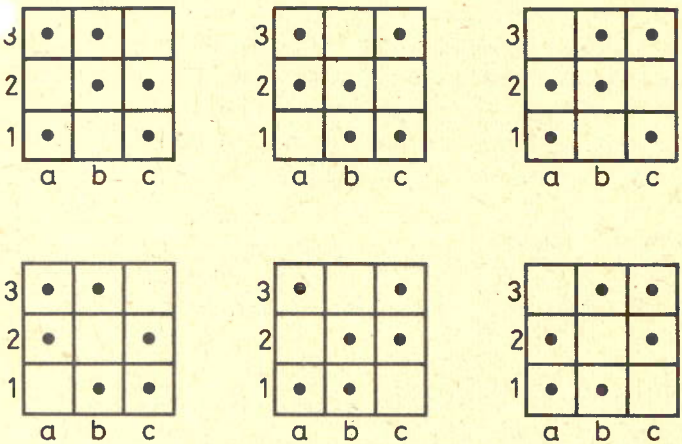


Abb. L 250621

250622) Lösung: 12 Punkte

I. Wenn vier Zahlen die geforderten Eigenschaften haben und dabei e das in (2) genannte Ergebnis ist, so ist

e − 4 die erste Zahl,
e − 3 die zweite Zahl,
e + 2 die dritte Zahl,
e + 1 die vierte Zahl.

Nach (1) gilt daher

$$\begin{aligned} e - 4 + e - 3 + e + 2 + e + 1 &= 60, \\ 4e - 4 &= 60, \\ 4e &= 64, \\ e &= 16; \end{aligned}$$

also lauten die vier gesuchten Zahlen: 12, 13, 18, 17.

II. Für die Zahlen gilt
$12 + 13 + 18 + 17 = 60$,
also ist (1) erfüllt, und es gilt
$12 + 4 = 16, \quad 13 + 3 = 16, \quad 18 - 2 = 16, \quad 17 - 1 = 16$,
also ist (2) erfüllt.

Anderer Lösungsweg:

I. Addiert man anstelle von vier Zahlen, die die geforderten Eigenschaften haben, die vier in (2) a) bis d) genannten Ergebnisse, so erhält man wegen $4 + 3 - 2 - 1 = 4$ eine um 4 größere Summe als 60, d. h. die Summe 64. Weil nach (2) diese vier Ergebnisse einander gleich sind, betragen sie $64 : 4 = 16$. Daher sind die gesuchten Zahlen 12, 13, 18 und 17.

II. Wie oben.

250623) Lösung: 10 Punkte

a)

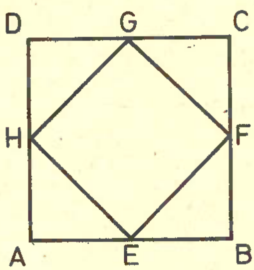


Abb. L 250623

b) Die Strecken EG und FH zerlegen das Quadrat ABCD in vier inhaltsgleiche Quadrate. Jedes dieser Quadrate wird durch die eingezeichnete Diagonale in zwei (gleichschenklig-rechtwinklige) inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt.
Das Quadrat ABCD ist aus acht solchen Dreiecken zusammengesetzt, die Fläche EFGH aus vier solchen Dreiecken; ihr Flächeninhalt ist daher halb so groß wie der von ABCD.
Wegen $14 \cdot 14 = 196$ hat ABCD den Flächeninhalt 196 $cm^2$.
Wegen $196 : 2 = 98$ hat somit EFGH den Flächeninhalt 98 $cm^2$.

250624) Lösung: 12 Punkte

a) Die in den folgenden Tabellen genannten Verteilungen erfüllen alle gestellten Bedingungen; denn bei diesen Verteilungen bekommt jedes der drei Kinder genau 7 Flaschen und soviel

Limonade, wie in $3\frac{1}{2}$ Flaschen paßt. Außerdem ist ersichtlich, daß jeweils 7 volle, 7 halbvolle und 7 leere Flaschen verteilt werden und daß für die Anzahlen der an Anke, Bernd und Claudia verteilten vollen Flaschen $3 \geqq 3 \geqq 1$ bzw. $3 \geqq 2 \geqq 2$ gilt.

| | voll | halbvoll | leer |
|---|---|---|---|
| A | 3 | 1 | 3 |
| B | 3 | 1 | 3 |
| C | 1 | 5 | 1 |

| | voll | halbvoll | leer |
|---|---|---|---|
| A | 3 | 1 | 3 |
| B | 2 | 3 | 2 |
| C | 2 | 3 | 2 |

b) Für jede Verteilung, die die geforderten Bedingungen erfüllt, gilt: Da 21 Flaschen und der Inhalt von $7 + \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$ Flaschen Limonade zu verteilen sind, bekommt jedes Kind 7 Flaschen und den Inhalt von $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ Flaschen Limonade. Daher folgt weiter: Anke könnte höchstens 3 volle Flaschen erhalten, da sie sonst mehr Limonade bekommen würde, als in $3\frac{1}{2}$ Flaschen paßt. Anke kann aber auch nicht weniger als 3 volle Flaschen erhalten, weil dann eines der beiden anderen Kinder von den verbleibenden mindestens 5 vollen Flaschen mehr Flaschen bekommen müßte als Anke.

Also muß Anke genau 3 volle Flaschen erhalten. Als einzige Möglichkeiten, die restlichen 4 vollen Flaschen so zu verteilen, daß von ihnen Anke nicht weniger als Bernd und Bernd nicht weniger als Claudia bekommt, ergeben sich die Verteilungen gemäß $4 = 3 + 1$ und $4 = 2 + 2$ (Spalte "voll" der obigen Tabellen).

Aus den Anzahlen der vollen und halbvollen Flaschen, die jedes Kind erhält, ergibt sich schließlich eindeutig, wieviel leere Flaschen es bekommen muß, um insgesamt 7 Flaschen zu erhalten (Spalte "leer").

Damit ist gezeigt, daß nur die beiden in a) angegebenen Verteilungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

## Empfehlung für die Punktverteilung
OKL Gesamtpunktzahl: 40

| | |
|---|---|
| **250621** | **6 Punkte** |
| Je Stellung 1 Punkt | |
| | |
| **250622** | **12 Punkte** |
| I. Erkennen der Beziehung $4 \cdot e = 64$ | 4 Punkte |
| Ermittlung der vier Zahlen | 4 Punkte |
| II. Nachweis, daß diese vier Zahlen die Bedingungen erfüllen | 4 Punkte |
| | |
| **250623** | **10 Punkte** |
| a) Konstruktion | 3 Punkte |
| b) Flächeninhalt des Quadrates | 1 Punkt |
| Begründung, daß die Summe der Flächeninhalte der vier Dreiecke gleich dem halben Flächeninhalt des Quadrates ist | 4 Punkte |
| Flächeninhalt von EFGH | 2 Punkte |
| | |
| **250624** | **12 Punkte** |
| a) Je Verteilung 3 Punkte | 6 Punkte |
| b) Begründung dafür, daß Anke genau 3 volle Flaschen erhält | 3 Punkte |
| Erkennen, daß es für die restlichen 4 vollen Flaschen genau zwei Möglichkeiten der Verteilung gibt | 1 Punkt |
| Erkennen, daß mit der Verteilung der vollen Flaschen auch die der halbvollen und die der leeren eindeutig bestimmt ist | 2 Punkte |