XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

241221

Es sei (a_n) diejenige Zahlenfolge, für die

$$a_1 = 2$$

und
$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

gilt.

a) Berechnen Sie a_2 und a_3 und beweisen Sie, daß $a_n > 1$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt!

b) Beweisen Sie, daß die Folge (a_n) streng monoton fallend ist!

241222

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 6 = 9xy, \qquad (1)$$

$$(x + y)^2 = 36. \qquad (2)$$

241223

Man prüfe, ob es eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen a_0, $a_1, \ldots, a_n$ gibt, so daß für

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

sowohl $p(7) = 1985$ als auch $p(3) = 1984$ gilt!

241224

a) Beweisen Sie, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck für die Seitenlängen a, b, c und die Höhenlängen h_a, h_b, h_c die Ungleichung

$$3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \geqq 4 \cdot (h_a{}^2 + h_b{}^2 + h_c{}^2) \qquad (1)$$

gilt!

b) Untersuchen Sie, ob (1) auch in jedem spitzwinkligen Dreieck gilt!

Gibt es a) rechtwinklige, b) spitzwinklige Dreiecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt?

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

241221) Lösung: 9 Punkte

a) Es gilt $a_2 = \frac{a_1^2 + 1}{a_1 + 1} = \frac{4 + 1}{2 + 1} = \frac{5}{3}$,

$$a_3 = \frac{a_2^2 + 1}{a_2 + 1} = (\frac{25}{9} + 1) : (\frac{5}{3} + 1) = (25 + 9):(15+9) = \frac{17}{12}.$$

Ferner gilt:

(I) Es ist $a_1 = 2 > 1$.

(II) Wenn für eine natürliche Zahl $n \geqq 1$ die Ungleichung $a_n > 1$ gilt, so folgt

$$a_n^2 > a_n,$$

$$a_n^2 + 1 > a_n + 1$$

und daraus, da wegen $a_n > 1$ erst recht $a_n + 1 > 0$ gilt,

$$\frac{a_n^2 + 1}{a_n + 1} > 1,$$

d. h. $a_{n+1} > 1$.

Mit (I) und (II) ist durch vollständige Induktion bewiesen, daß $a_n > 1$ für alle $n = 1,2,3,\ldots$ gilt.

b) Für jedes $n = 1,2,3,\ldots$ gilt nach a)

$$1 < a_n,$$

also $a_n^2 + 1 < a_n^2 + a_n = a_n(a_n + 1)$.

Hieraus folgt, da wegen $a_n > 1$ erst recht $a_n + 1 > 0$ ist,

$$\frac{a_n^2 + 1}{a_n + 1} < a_n.$$

d. h. $a_{n+1} < a_n$, w.z.b.w.

241222) Lösung: **10 Punkte**

I. Wenn reelle Zahlen x und y das Gleichungssystem (1),(2) erfüllen, so folgt:

Nach (2) ist $x^2 + y^2 = 36 - 2xy$. Setzt man dies in (1) ein, so ergibt sich

$$x^2y^2 + 36 - 2xy - 6 = 9xy,$$

$$x^2y^2 - 11xy + 30 = 0.$$

Die Zahl $z = xy$ erfüllt also die Gleichung $z^2 - 11z + 30 = 0$.

Daraus folgt $z = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 30} = \frac{11}{2} \pm \frac{1}{2}$, d. h.

$$xy = 5 \quad \text{oder} \quad xy = 6.$$

Nach (2) gilt ferner $x + y = \pm 6$, also

$$y = \pm 6 - x. \qquad (3)$$

Setzt man (3) zunächst in $xy = 5$ ein, so folgt

$$x \cdot (\pm 6 - x) = 5,$$

$$x^2 \mp 6x + 5 = 0,$$

$$x = \pm 3 \pm \sqrt{9 - 5} = \pm 3 \pm 2$$

(wobei die beiden Doppelvorzeichen unabhängig voneinander gewählt werden können), also

$$x = 5 \quad \text{oder} \quad x = 1 \quad \text{oder} \quad x = -1 \quad \text{oder} \quad x = -5.$$

Hieraus und aus $xy = 5$ erhält man jeweils zugehörig

$$y = 1 \quad \text{bzw.} \quad y = 5 \quad \text{bzw.} \quad y = -5 \quad \text{bzw.} \quad y = -1.$$

Setzt man andererseits (3) in $xy = 6$ ein, so folgt

$$x \cdot (\pm 6 - x) = 6,$$

$$x^2 \mp 6x + 6 = 0,$$

$$x = \pm 3 \pm \sqrt{9 - 6} = \pm 3 \pm \sqrt{3}.$$

Hieraus und aus $xy = 6$ folgt

$$y = \frac{6}{\pm 3 \pm \sqrt{3}} = \frac{6 \cdot (\pm 3 \mp \sqrt{3})}{9 - 3} = \pm 3 \mp \sqrt{3}$$

(jeweils sowohl im ersten als auch im zweiten Doppelvorzeichen mit der gleichen Wahl zwischen oberem und unterem Zeichen wie bei x).

Daher können nur die Paare

(5;1), (1;5), (- 1; - 5), (- 5; - 1),

$(3+\sqrt{3};\ 3-\sqrt{3}),\ (3-\sqrt{3};\ 3+\sqrt{3}),$
$(-3+\sqrt{3};\ -3-\sqrt{3}),\ (-3-\sqrt{3};\ -3+\sqrt{3})$ (5)

das Gleichungssystem (1),(2) erfüllen.

II. Für die Paare (4) gilt $xy = 5$, $x^2 + y^2 = 26$, also ist (1) mit
$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 6 = 25 + 26 - 6 = 45 = 9xy$$
erfüllt.
Für die Paare (5) gilt $xy = 9 - 3 = 6$,
$$x^2 + y^2 = 9 + 6\sqrt{3} + 3 + 9 - 6\sqrt{3} + 3 = 24,$$
also ist (1) mit
$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 6 = 36 + 24 - 6 = 54 = 9xy$$
erfüllt.
Für alle Paare (4),(5) gilt $x + y = \pm 6$, also ist (2) erfüllt.

Mit I. und II. ist gezeigt, daß genau die Paare in (4) und (5) das Gleichungssystem (1),(2) erfüllen.

241223) Lösung: 10 Punkte

Angenommen, es gäbe eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ so, daß für $p(x)$ sowohl $p(7) = 1985$ als auch $p(3) = 1984$ gelten würde.
Dann müßte $p(7) - p(3) = a_n\,(7^n - 3^n) + a_{n-1}\,(7^{n-1} - 3^{n-1}) + \ldots + a_1\,(7-3)$ gelten.
Da für beliebige reelle Zahlen a und b und beliebiger natürlicher Zahlen k die Beziehung
$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + a\,b^{k-2} + b^{k-1})$$ gilt, müßte $p(7) - p(3)$ durch 7-3, also durch 4 teilbar sein.
Dies steht im Widerspruch dazu, daß andererseits $p(7) - p(3) = 1$ ist und 1 nicht durch 4 teilbar ist.
Es gibt also keine natürliche Zahl n und keine ganzen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit der verlangten Eigenschaft.

241224) Lösung: 11 Punkte

a) Hat die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die Länge c und wird sie durch die zugehörige Höhe in Abschnitte der Längen p und q zerlegt, so ist nach dem Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$, $h_c{}^2 = a^2 - p^2 = b^2 - q^2$. Ferner gilt $h_a = b$ und $h_b = a$. Damit gilt in jedem rechtwinkligen Dreieck

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 4h_a{}^2 - 4h_b{}^2 - 4h_c{}^2$$
$$= 3a^2 + 3b^2 + 3a^2 + 3b^2 - 4b^2 - 4a^2 - 2a^2 + 2p^2 - 2b^2 + 2q^2$$
$$= 2p^2 + 2q^2$$
$$> 0.$$

Ungleichung (1) ist hiermit für alle rechtwinkligen Dreiecke bewiesen. Zugleich ist gezeigt, daß es kein rechtwinkliges Dreieck gibt, für das in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

b) Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Die Höhenfußpunkte H_a, H_b, H_c liegen dann auf den Seiten BC, CA bzw. AB, und für die Längen $\overline{BH_a} = a_1$, $\overline{H_aC} = a_2$, $\overline{CH_b} = b_1$, $\overline{H_bA} = b_2$, $\overline{AH_c} = c_1$, $\overline{H_cB} = c_2$ gilt

$$a_1 + a_2 = a,\ b_1 + b_2 = b,\ c_1 + c_2 = c. \qquad (2)$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt ferner

$$c^2 = h_a{}^2 + a_1{}^2,\quad b^2 = h_a{}^2 + a_2{}^2,$$
$$a^2 = h_b{}^2 + b_1{}^2,\quad c^2 = h_b{}^2 + b_2{}^2,$$
$$b^2 = h_c{}^2 + c_1{}^2,\quad a^2 = h_c{}^2 + c_2{}^2.$$

Addiert man diese sechs Gleichungen, so ergibt sich nach Multiplikation mit 2

$$4(a^2+b^2+c^2) = 4(h_a^2+h_b^2+h_c^2)+2(a_1^2+a_2^2)+2(b_1^2+b_2^2)+2(c_1^2+c_2^2). \qquad (3)$$

Nun gilt wegen $(a_1 - a_2)^2 \geqq 0$ die Ungleichung $a_1{}^2+a_2^2 \geqq 2a_1a_2$,

also $$2(a_1{}^2 + a_2{}^2) \geqq (a_1 + a_2)^2 = a^2 \qquad (4)$$

und analog $$2(b_1{}^2 + b_2{}^2) \geqq b^2, \qquad (5)$$
$$2(c_1{}^2 + c_2{}^2) \geqq c^2. \qquad (6)$$

Damit folgt aus (3)

$$4(a^2+b^2+c^2) \geqq 4(h_a{}^2+ h_b{}^2+ h_c{}^2)+(a^2+b^2+c^2);$$

d. h., (1) gilt auch fürjedes spitzwinklige Dreieck.
Es gibt spitzwinklige Dreiecke, für die das Gleichheitszeichen in (1) gilt. Im gleichseitigen Dreieck gilt nämlich $a = b = c$ und $h_a = h_b = h_c = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, woraus (1) mit dem Gleichheitszeichen folgt.

Bemerkungen:

Das Gleichheitszeichen gilt nur in gleichseitigen Dreiecken. Denn wie man der obigen Herleitung entnimmt, gilt das Gleichheitszeichen in (1) nur dann, wenn es in (4),(5) und (6) gilt. Das aber ist nur für $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = 0$ der Fall, woraus folgt, daß $\triangle ABC$ sowohl mit $b = c$ als auch mit $c = a$ als auch mit $a = b$ gleichschenklig, d. h. gleichseitig ist.

Auch den umgekehrten Schluß hätte man im obigen Lösungsweg unter Nutzung des Gleichheitszeichens in (4),(5),(6) (statt der Verwendung von $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$) durchführen können.
Der in b) gegebene Beweis (einschließlich der ebengenannten Diskussion des Gleichheitszeichens) bleibt auch für rechtwinklige Dreiecke möglich. Gestaltet man ihn so, so erübrigt sich eine gesonderte Behandlung von a).
Die Ungleichung (1), ohne Zulassung des Gleichheitszeichens, gilt auch für stumpfwinklige Dreiecke. Bei diesen tritt nämlich – bei sonst unveränderter Herleitung vermittels (3) – in (2) zweimal anstelle des Gleichheitszeichens ein Größerzeichen auf; daher gilt auch in zwei der Beziehungen (4),(5),(6) das Größerzeichen.
Diese Aussagen werden vom Schüler nicht verlangt.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 11/12 Gesamtpunktzahl: 40

241221	9 Punkte
a) Berechnung von a_2 und a_3	2 Punkte
Nachweis für $a_n > 1$	4 Punkte
b)	3 Punkte
241222	10 Punkte
I. Nachweis, daß die Paare (4) als Lösungen in Frage kommen	3 Punkte
Nachweis, daß die Paare (5) als Lösungen in Frage kommen	4 Punkte
II. Nachweis, daß die Paare (4) das Gleichungssystem erfüllen	1 Punkt
Nachweis, daß die Paare (5) das Gleichungssystem erfüllen	2 Punkte
241223	10 Punkte
241224	11 Punkte
a) Nachweis der Gültigkeit von (1) in rechtwinkligen Dreiecken	4 Punkte
Bemerkung, daß bei rechtwinkligen Dreiecken in (1) das Gleichheitszeichen nicht gilt	1 Punkt
b) Nachweis der Gültigkeit von (1) in spitzwinkligen Dreiecken	5 Punkte
Nachweis, daß bei gleichseitigen Dreiecken in (1) das Gleichheitszeichen gilt	1 Punkt