Umlauf

A 10;I XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

241041

Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen, für die $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1985}$ gilt!

241042

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Auf den Seiten BC, CA, AB seien D, E bzw. F diejenigen Punkte, für die $\overline{BD} = 2\cdot\overline{CD}$, $\overline{CE} = 2\cdot\overline{AE}$, $\overline{AF} = 2\cdot\overline{BF}$ gilt. Weiter sei jeweils U bzw. V bzw. W der Schnittpunkt von AD mit BE bzw. von BE mit CF bzw. von CF mit AD.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen der Flächeninhalt des Dreiecks UVW stets gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des Dreiecks ABC ist!

Von den nachstehenden Aufgaben 241043A und 241043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

241043 A

a) Man beweise, daß für jede reelle Zahl p mit $1 \leq p \leq 2$ eine Funktion f mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) existiert:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.
(2) Für alle reellen Zahlen x mit $2 \leq x < 4$ gilt $f(x) = p$.
(3) Für alle reellen Zahlen x gilt $f(x+2) = \frac{f(x)}{5\cdot f(x) - 1}$.

b) Man ermittle für jede reelle Zahl p mit $1 \leq p \leq 2$ und jede Funktion f, die die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, den Funktionswert f(1985) in Abhängigkeit von p.

241043 B

Es sei P die Oberfläche einer beliebigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Man beweise: Wenn der Durchschnitt von P mit einer Ebene E ein (nicht entartetes) Parallelogramm ist, dann ist er ein Quadrat.
(Hinweis: Ein Parallelogramm heißt genau dann "nicht entartet", wenn keine drei seiner Eckpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.)

Umlauft

A 10;II XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

241044

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen, für die $a! + b! = (a + b)!$ gilt!

(Hinweis: Für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ ist $n!$ definiert als das Produkt aus allen denjenigen natürlichen Zahlen k, für die $1 \leqq k \leqq n$ gilt; ferner ist $0! = 1$ definiert.)

241045

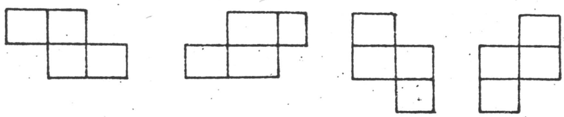
Es sei

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{999998}} + \frac{1}{\sqrt{999999}} + \frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

Weisen Sie nach, daß dann $1998 < T < 1999$ gilt!

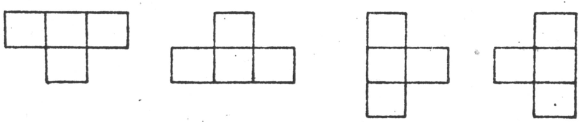
241046

a) Es ist zu entscheiden, ob es möglich ist, die Felder des 8×8 Schachbrettes derart mit den Zahlen 1, 2, ..., 64 zu numerieren, daß für jede Teilfigur des Schachbrettes, die von der folgenden Form ist,



die Summe der vier Zahlen in den Teilfiguren durch vier teilbar ist.

b) Dieselbe Aufgabe ist für



zu lösen.

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

241041) Lösung: 6 Punkte

I. Wenn $(x;y)$ ein Paar ganzer Zahlen ist, das

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1985} \qquad (1)$$

erfüllt, so folgt aus der Existenz der Wurzeln

$$x \geqq 0 \quad \text{und} \quad y \geqq 0; \qquad (2)$$

aus $\sqrt{y} \geqq 0$ und (1) folgt $\sqrt{x} \leqq \sqrt{1985}$, also

$$x \leqq 1985. \qquad (3)$$

Andererseits folgt aus (1)

$$\sqrt{y}=\sqrt{1985}-\sqrt{x},$$
$$y = 1985 - 2\sqrt{1985x} + x,$$
$$2\sqrt{1985x} = 1985 + x - y,$$
$$4\cdot 1985x = (1985 + x - y)^2. \qquad (4)$$

Wegen der Primfaktorzerlegung $1985 = 5\cdot 397$ und da $4\cdot 1985x$ nach (4) eine Quadratzahl ist, muß x durch die Primfaktoren 5 und 397 jeweils in ungerader, also von 0 verschiedener Potenz teilbar und somit durch 1985 teilbar sein. Wegen (2), (3) ist dies nur möglich für

$$x = 0 \text{ oder } x = 1985;$$

hierzu gehören nach (1) die Werte

$$y = 1985 \quad \text{bzw.} \quad y = 0.$$

Daher können nur die Paare

$$(0;1985) \text{ und } (1985;0) \qquad (5)$$

die geforderten Eigenschaften haben.

II. Sie haben diese Eigenschaften; denn 0 und 1985 sind ganze Zahlen, und es gilt

$$\sqrt{0}+\sqrt{1985}=\sqrt{1985}+\sqrt{0}=\sqrt{1985}.$$

Somit sind genau die Paare (5) die gesuchten.

241042) Lösung: **6 Punkte**

Nach Voraussetzung ist $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AC}$. Da die Dreiecke ABE, ABC bezüglich der Grundlinie AE bzw. AC dieselbe Höhe haben, folgt[1]

$$J(ABE) = \frac{1}{3} \cdot J(ABC). \qquad (1)$$

Der Schnittpunkt von AD mit der Parallelen durch E zu BC sei S. Dann folgt aus dem Strahlensatz $\overline{ES} = \frac{1}{3}\overline{CD} = \frac{1}{6}\overline{BD}$ und weiter $\overline{UE}:\overline{UB} = \overline{ES}:\overline{SD} = 1:6$,[2] also $\overline{UE} = \frac{1}{7}\overline{BE}$. Ferner ergibt der Strahlensatz für die Längen h_U, h_E der von U bzw. E auf die Gerade durch A und B gefällten Lote $h_U : h_E = \overline{BU} : \overline{BE} = 6:7$. Hiernach und nach (1) gilt

$$J(ABU) = \frac{6}{7} \cdot J(ABE) = \frac{2}{7} \cdot J(ABC).$$

Analog folgt $J(BCV) = \frac{2}{7} \cdot J(ABC)$, $J(CAW) = \frac{2}{7} \cdot J(ABC)$ und damit, wie behauptet,

$$J(UVW) = J(ABC) - J(ABU) - J(BCV) - J(CAW) = \frac{1}{7} \cdot J(ABC).$$

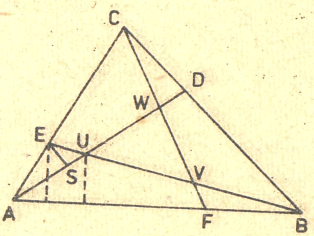


Abb. L241042

241043 A) Lösung: **8 Punkte**

a) Den geforderten Existenzbeweis kann man führen, indem man eine Funktion f definiert und (aus ihrer Definition) nachweist, daß sie die Eigenschaften (1), (2), (3) hat:

Es werde für alle ganzen Zahlen g

$$f(4g+z) := \begin{cases} \dfrac{p}{5p-1} & \text{für } 0 \leqq z < 2 \\ p & \text{für } 2 \leqq z < 4 \end{cases} \qquad (4)$$

definiert. Dann gilt:

---

1 Ist XYZ ein Dreieck, so bezeichne J(XYZ) seinen Flächeninhalt.

2 Diese Aussage kann auch (ohne nochmalige Ausführung des Beweises) als Zitat von Aufgabe 241035 angeführt werden.

Da es zu jeder reellen Zahl x genau eine ganze Zahl g und genau eine reelle Zahl z mit $x = 4g+z$ und $0 \leqq z < 4$ gibt und da wegen $p \geqq 1$ ferner $5p-1 > 0$ ist, ist f durch (4) für alle reellen Zahlen x definiert; d. h., (1) ist erfüllt.
Nach (4) für $g = 0$ ist auch (2) erfüllt.
Für alle ganzen Zahlen g gilt ferner:
Ist $x = 4g+z$ mit $0 \leqq z < 2$, so ist einerseits $f(x) = \frac{p}{5p-1}$ und damit $5 \cdot f(x) > 1$, also $\frac{f(x)}{5 \cdot f(x)-1}$ definiert, andererseits $x+2 = 4g+z+2$ und $2 \leqq z+2 < 4$, also

$$\frac{f(x)}{5 \cdot f(x) - 1} = \frac{\frac{p}{5p-1}}{\frac{5p}{5p-1} - 1} = \frac{p}{5p - (5p-1)} = p = f(x+2).$$

Ist aber $x = 4g+7$ mit $2 \leqq z < 4$, so ist einerseits $f(x) = p$, also $\frac{f(x)}{5 \cdot f(x) - 1}$ definiert, andererseits $x+2 = 4(g+1)+z-2$ und $0 \leqq z-2 < 2$, also

$$\frac{f(x)}{5 \cdot f(x) - 1} = \frac{p}{5p-1} = f(x+2).$$

Damit ist $f(x+2) = \frac{f(x)}{5 \cdot f(x) - 1}$ für alle reellen x, d. h. (3), nachgewiesen.

b) Wenn p eine reelle Zahl mit $1 \leqq p \leqq 2$ und f eine Funktion mit den Eigenschaften (1), (2), (3) ist, so gilt: Für alle reellen x ist

$$f(x+4) = \frac{f(x+2)}{5 \cdot f(x+2) - 1} = \frac{\frac{f(x)}{5 \cdot f(x) - 1}}{\frac{5 \cdot f(x)}{5 \cdot f(x) - 1}} = f(x).$$

Die Funktion f ist also periodisch mit der Periode 4. Hieraus und aus (3), (2) folgt

$$f(1985) = f(5+4 \cdot 495) = f(5) = f(3+2) = \frac{f(3)}{5 \cdot f(3) - 1} = \frac{p}{5p-1}.$$

<u>241043 B) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Der Durchschnitt von P mit E sei das (nicht entartete) Parallelogramm HKLM; für die Gerade g_1 durch H und K sowie die Gerade g_2 durch M und L gilt hiernach $g_1 \parallel g_2$ und $g_1 \neq g_2$.

Die Grundfläche der Pyramide sei ABCD, die Spitze S; die Oberfläche P besteht somit aus der Quadratfläche ABCD und den Dreiecksflächen ABS, BCS, CDS, ADS. Keine zwei der Ebenen, in denen diese fünf Flächen liegen, sind zueinander parallel, also auch nicht diejenigen beiden Ebenen E_1, E_2, die g_1 bzw. g_2 als Durchschnitt mit E haben. Somit ist der Durchschnitt von E_1 mit E_2 eine Gerade h.

Für diese gilt $g_1 \parallel h$ und $g_1 \neq h$; denn andernfalls hätten g_1 und h, da sie in E_1 liegen, einen gemeinsamen Punkt; dieser würde (da er auf h läge) auch zu E_2 und folglich (da er in E läge) zu g_2 gehören, was wegen $g_1 \parallel g_2$, $g_1 \neq g_2$ nicht möglich ist. Ebenso beweist man $g_2 \parallel h$ und $g_2 \neq h$.

Für E_1 und E_2 liegt nun einer der folgenden Fälle (1), (2), (3) vor:

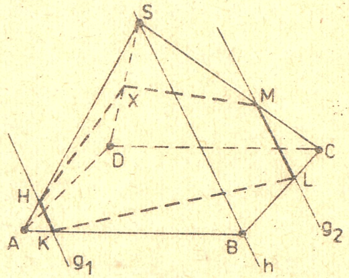


Abb. L 241043Ba

(1) In E_1, E_2 liegen zwei benachbarte Dreiecksflächen aus P, o.B.d.A.: In E_1 liegt ABS, in E_2 liegt BCS. Wäre dieser Fall möglich, so folgte: h wäre die Gerade durch B und S, und es läge (o.B.d.A.) H zwischen A und S, K zwischen A und B, L zwischen B und C, M zwischen C und S (Abb. L 241043Ba).

Da g_1 (zwar durch H, aber) wegen $g_1 \parallel h$, $g_1 \neq h$ nicht durch S ginge, also von der Geraden durch A und S verschieden wäre, schnitte E die Ebene durch A,D,S in einer Geraden, die mit der Dreiecksfläche ADS eine Strecke HX gemeinsam hätte. Die Schnittfigur von E mit der Pyramidenoberfläche P hätte somit außer H,K,L,M einen weiteren Eckpunkt X, wäre also nicht, wie angenommen, ein (nicht entartetes) Parallelogramm. Daher ist Fall (1) nicht möglich.

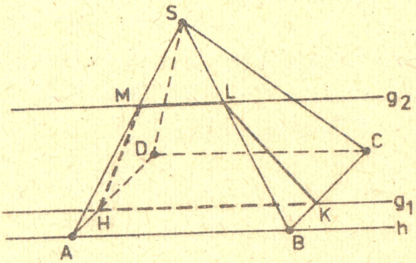


Abb. L 241043Bb

(2) In E_1, E_2 liegen eine Dreiecksfläche und die Quadratfläche aus P, o.B.d.A.: In E_1 liegt ABCD, in E_2 liegt ABS. Wäre dieser Fall möglich, so folgte: h wäre die Gerade durch A und B, und es läge (o.B.d.A.) H zwischen A und D, K zwischen B und C, L zwischen B und S, M zwischen A und S (Abb. L 241043Bb).

Wegen $HA \perp AB$, $KB \perp AB$ und $HK \parallel AB$ wäre ABKH ein Rechteck. Ferner wäre $\overline{MS} < \overline{AS}$, also wegen $ML \parallel AB$ nach dem Strahlensatz $\overline{ML} < \overline{AB} = \overline{HK}$; somit wäre HKLM kein Parallelogramm. Also ist auch der Fall (2) nicht möglich.

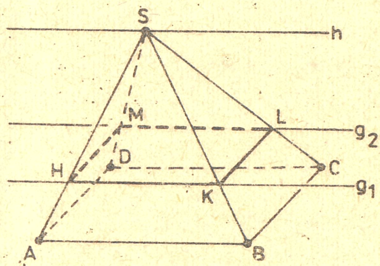


Abb. L 241043Bc

(3) In E_1, E_2 liegen zwei nicht benachbarte Dreiecksflächen aus P, o.B.d.A.: In E_1 liegt ABS, in E_2 liegt CDS. In diesem Fall ist h die zu AB und DC parallele Gerade durch S, und es liegt (o.B.d.A.) H in A oder zwischen A und S, K in B oder zwischen B und S, L in C oder zwischen C und S, M in D oder zwischen D und S (Abb. L 241043Bc).

Aus $HK \parallel AB$, $\overline{HK} = \overline{ML}$, $ML \parallel DC$ und dem Strahlensatz folgt

$$\overline{HS} : \overline{AS} = \overline{HK} : \overline{AB} = \overline{ML} : \overline{DC} = \overline{MS} : \overline{DS}.$$

Hieraus folgt nach der Umkehrung des Strahlensatzes $HM \parallel AD$.
Also ist die Ebene E parallel zur Ebene durch A,B,C,D und schnei-

det P folglich in einer zu ABCD ähnlichen Figur[1], d. h. in einem Quadrat.

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> Es kann auch akzeptiert werden, die im Beweis verbal ausgeführten Lagebeziehungen in stärkerem Maße durch Verweise auf angegebene Abbildungen zu belegen.

---

1 Ausführlich: Es gilt auch $\overline{HS} : \overline{AS} = \overline{HM} : \overline{AD}$ sowie $\overline{KS} : \overline{BS} = \overline{HS} : \overline{AS} = \overline{MS} : \overline{DS}$, also $KM \parallel BD$ und daher $\overline{KM} : \overline{BD} = \overline{KS} : \overline{BS}$. Damit ist $\overline{HK} : \overline{AB} = \overline{HM} : \overline{AD} = \overline{KM} : \overline{BD}$, also $\triangle HKM \sim \triangle ABD$ gezeigt. Analog (oder auch schon aus den vorausgesetzten Parallelogrammeigenschaften) folgt $\triangle KLM \sim \triangle BCD$ und somit insgesamt $HKLM \sim ABCD$.

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

241044) Lösung: 6 Punkte

Es genügt o.B.d.A., Paare mit $a \geqq b$ zu betrachten.

Ist $b = 0$, so ist $a! + b! = a! + 1 \neq a! = (a + b)!$.

Ist $a \geqq b \geqq 1$, so gilt:

Im Fall $a = 1$, d. h. für das Paar $(a;b) = (1;1)$, ist
$a! + b! = 2 = (a + b)!$.

Im Fall $a > 1$ dagegen ist
$a! + b! \leqq a! + a! = a! \cdot 2 < a! \cdot (a + 1) \leqq (a + b)!$.

Daher erfüllt genau das Paar (1;1) die verlangte Gleichung.

241045) Lösung: 7 Punkte

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 2$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

Beweis:

I. Aus $2\sqrt{2} < 4-1$ folgt nach Division durch $\sqrt{2}$, daß
$2 < 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$, also $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 1$ gilt, d. h.
die Behauptung für $n = 2$.

II. Wenn die Behauptung für ein $n \geqq 2$ gilt, so folgt

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \qquad (1)$$

Andererseits gilt

$$4n(n+1) < 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2,$$

also $2\sqrt{n}\sqrt{n+1} < 2n+1 = 2(n+1)-1$,

woraus sich nach Division durch $\sqrt{n+1}$

$$2\sqrt{n} < 2\sqrt{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

also $$2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 1 \qquad (2)$$

ergibt. Aus (1) und (2) folgt die Behauptung für n+1.

Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

(b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2.$$

Beweis:

I. Es gilt $1 > 2\sqrt{2} - 2$, d. h. die Behauptung für $n = 1$.

II. Wenn die Behauptung für ein $n \geqq 1$ gilt, so folgt

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \qquad (3)$$

Andererseits gilt

$$(2n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 9 > 4(n+1)(n+2),$$

also $\quad 2(n+1)+1 = 2n+3 > 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2},$

woraus sich nach Division durch $\sqrt{n+1}$

$$2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+2},$$

also $$2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+2} - 2 \qquad (4)$$

ergibt. Aus (3) und (4) folgt die Behauptung für $n+1$.

Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

Mit (a) und (b) für $n = 1000000$ erhält man

$$2 \cdot 1000 - 2 < 2\sqrt{1000001} - 2 < T < 2\sqrt{1000000} - 1 = 2 \cdot 1000 - 1,$$

w.z.b.w.

<u>Andere Lösungsdarstellung:</u>

Nach Aufgabe 241032 gilt

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

für alle n 1. Daraus folgt

$$2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2(\sqrt{2} - \sqrt{1}),$$

$$2(\sqrt{4} - \sqrt{3}) < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}),$$

....

$$2(\sqrt{1000001} - \sqrt{1000000}) < \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 2(\sqrt{1000000} - \sqrt{999999}).$$

Summiert man diese Ungleichungen und addiert 1, so ergibt sich

$$1 + 2\sqrt{1000001} - 2\sqrt{2} \;<\; T \;<\; 1 + 2\sqrt{1000000} - 2\sqrt{1},$$

also (wegen $\sqrt{1000001} > 1000$ und $2\sqrt{2} < 3$) erst recht

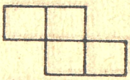
$$1 + 2000 - 3 \;<\; T \;<\; 1 + 2000 - 2, \text{ w.z.b.w.}$$

241046) Lösung:

a) Es genügt, die Aufgabe für die Reste mod 4 der Zahlen 1,2,...,64 zu lösen, von denen es 16 in jeder Klasse gibt. Indem wir die Reste gemäß der Tabelle

1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3
1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3

verteilen, sehen wir, daß die Bedingung erfüllt ist. Für die Teilfigur



können die beiden oberen Felder mit (3,0), (0,1), (1,2), (2,3), (3,2), (2,1), (1,0) bzw. (0,3) belegt sein. Dann sind die beiden unteren mit (1,0), (0,3), (3,2), (2,1), (1,2), (2,3), (3,0) bzw. (0,1) belegt, und 4 teilt die Summe.

Analog diskutiert man die anderen Teilfiguren (vom Schüler nachzuvollziehen bzw. durch Symmetriebetrachtungen zu begründen).

b) Angenommen die verlangte Numerierung existiert!

Da das Schachbrett nur 28 Randfelder hat und auf jeweils 32 Feldern gerade bzw. ungerade Zahlen eingetragen sind, muß es zwei benachbarte Felder geben, von denen keines auf dem Rand liegt und eines eine gerade Zahl g, das andere Feld eine ungerade Zahl u enthält. Wir betrachten die Teilfiguren:

x	y	z
a	g	b
c	u	d
e	f	h

Wegen

a	g	b
	u	

gilt $a \not\equiv b \bmod 2$. (1)

Wegen

	y
a	g
	u

gilt $a \not\equiv y \bmod 2$. (2)

Wegen

y	
g	b
u	

gilt $b \not\equiv y \bmod 2$. (3)

Die Beziehungen (1), (2), (3) liefern einen Widerspruch. Folglich existiert die verlangte Numerierung nicht.