XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>241031</u>

In einer Diskussion über die Anzahl von Kurvenschnittpunkten behauptet Anne, ausgehend vom Beispiel der Kurven mit den Gleichungen $y = \cos x$ und $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$: "Die Kurve c mit der Gleichung $y = \cos x$ hat mit jeder quadratischen Parabel genau zwei Schnittpunkte."

Bernd behauptet dagegen: "Es gibt auch eine quadratische Parabel, die mit der Kurve c genau 10 Schnittpunkte hat."

Untersuchen Sie sowohl für Annes als auch für Bernds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

<u>241032</u>

Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen x, die größer als 1 sind, die folgenden Ungleichungen (1) gelten!

$$2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) \qquad (1)$$

<u>241033</u>

Die Abbildung A 241033 und das Arbeitsblatt zeigen das Bild A'B'C'D'E'F'G'H' eines Würfels ABCDEFGH in schräger Parallelprojektion sowie die Bilder M_1', M_2', M_3' der Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Würfelkanten DA, DC bzw. DH.

Ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche $M_1M_2M_3$ sei, habe als Seitenkanten Strecken M_1N_1, M_2N_2 und M_3N_3, die parallel zu DF verlaufen. Die Deckfläche $N_1N_2N_3$ des Prismas liege so weit außer-

A 10;I

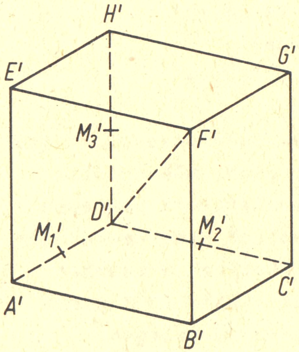


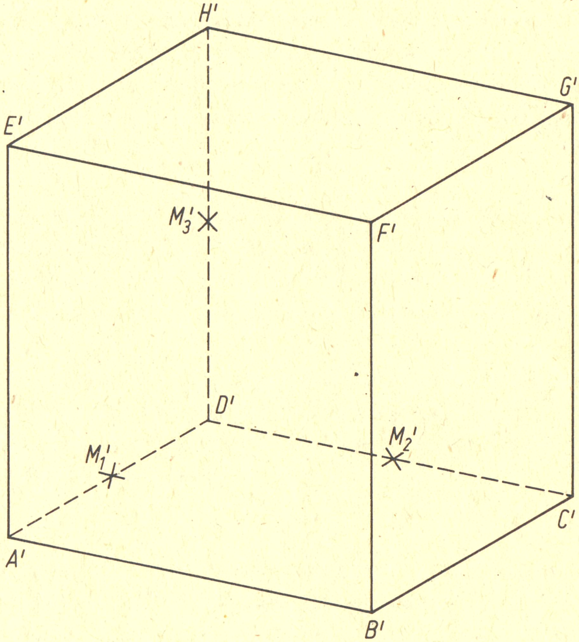
Abb. A241033

halb des Würfels, daß das Prisma in seinem Innern den Punkt F enthält.

Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Bilder der Schnittlinien, die die Oberfläche des Prismas mit der Oberfläche des Würfels hat! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, daß eine nach Ihrer Beschreibung durchgeführte Konstruktion die Bilder aller genannten Schnittlinien ergibt!

A 10;I

Arbeitsblatt zu 241033



XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>241034</u>

Jemand sucht natürliche Zahlen, die sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen. Er findet z. B., daß sowohl jede der Zahlen 89 und 90 als auch ihr Produkt 8010 diese Eigenschaft hat.

a) Bestätigen Sie, daß sich jede der Zahlen 89, 90 und 8010 als Summe von jeweils zwei Quadratzahlen darstellen läßt!

b) Beweisen Sie den folgenden allgemeinen Satz!

Wenn s und t jeweils eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft ist, sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen zu lassen, dann hat auch stets die Zahl $s \cdot t$ diese Eigenschaft.

<u>241035</u>

a) Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck ABC, verlängern Sie AC über C hinaus bis zu demjenigen Punkt C', für den $\overline{AC'} = 3 \cdot \overline{AC}$ ist, und konstruieren Sie auf BC' denjenigen Punkt Y, für den $\overline{BY} = 2 \cdot \overline{C'Y}$ gilt! Der Schnittpunkt von AY mit BC sei X.

b) Beweisen Sie, daß die in a) verlangte Konstruktion für jedes Dreieck ABC auf denselben Wert des Verhältnisses $\overline{BX} : \overline{CX}$ führt! Ermitteln Sie diesen Wert!

<u>241036</u>

Man ermittle für jede Funktion f, die die folgenden Eigenschaften (1),(2) und (3) hat, die Funktionswerte f(0), f(-1) und $f(\frac{3}{7})$.

(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.

(2) Es gilt $f(1) = 2$.

(3) Für alle reellen Zahlen a und b gilt $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$.

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

241031) Lösung: 5 Punkte

Es genügt z. B., die quadratische Parabel q mit der Gleichung $y = \frac{1}{169}x^2$ und die Kurve c zu betrachten. Für sie gilt:

In jedem der Intervalle $[0;\pi]$, $[2\pi;3\pi]$, $[4\pi;5\pi]$ haben q und c genau einen Schnittpunkt; denn am linken Endpunkt liegt[1] q unterhalb c, am rechten Eckpunkt liegt[2] c unterhalb q, und in diesen Intervallen ist c fallend und q steigend.

In jedem der Intervalle $\left[\pi;\frac{3}{2}\pi\right]$, $\left[3\pi;\frac{7}{2}\pi\right]$ liegt kein Schnittpunkt von q und c; denn dort liegt c wegen $\cos x \leqq 0 < \frac{1}{169}x^2$ unterhalb q.

In jedem der Intervalle $\left[\frac{3}{2}\pi;2\pi\right]$, $\left[\frac{7}{2}\pi;4\pi\right]$ liegt genau ein Schnittpunkt von q und c; denn am linken Endpunkt liegt c unterhalb q, am rechten Endpunkt liegt q unterhalb c (wie bereits festgestellt), und in diesen Intervallen sind zwar q und c beide steigend, aber q von unten betrachtet konvex und c konkav.

Im Intervall $[5\pi;+\infty)$ liegt kein Schnittpunkt; denn wegen $13 < 5\pi$ gilt $\frac{1}{169}x^2 \geqq \frac{1}{169}\cdot(5\pi)^2 > 1 \geqq \cos x$.

Somit haben q und c im Intervall $[0;+\infty)$ genau 5 Schnittpunkte; bei Spiegelung an der y-Achse findet man genau 5 weitere.

Damit ist gezeigt: Annes Behauptung ist falsch, Bernds Behauptung ist wahr.

---

1 Beweis: Wegen $4\pi < 13$ gilt $\frac{1}{169}\cdot 0^2 < \frac{1}{169}\cdot(2\pi)^2 < \frac{1}{169}\cdot(4\pi)^2 < 1 = \cos 0 = \cos 2\pi = \cos 4\pi$.

2 Beweis: Es gilt $\cos\pi = \cos 3\pi = \cos 5\pi < 0 < \frac{1}{169}\cdot\pi^2 < \frac{1}{169}\cdot(3\pi)^2 < \frac{1}{169}\cdot(5\pi)^2$.

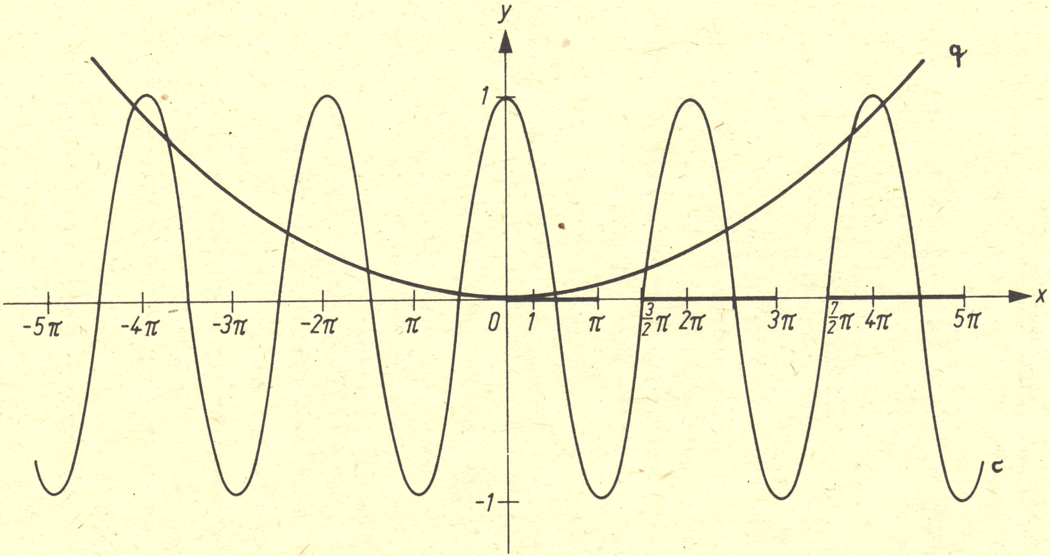


Abb. L 241031

Hinweis: Statt der zumeist rechnerisch formulierten Beweisführung ist auch eine weitergehend anschaulich vorgehende Argumentation anhand einer Zeichnung zulässig, vorausgesetzt, daß Text und Zeichnung die vorliegenden Monotonie- und Konvexitätsverhältnisse sowie das daraus resultierende Schnittverhalten qualitativ richtig wiedergeben.

241032) Lösung: **7 Punkte**

Da $x > 1$ gilt, sind alle auftretenden Wurzeln sowie der Bruch $\frac{1}{\sqrt{x}}$ definiert.

Die Behauptung (1) ist bewiesen, wenn für alle $x > 1$

$$2\sqrt{x}\sqrt{x+1} - 2x < 1 < 2x - 2\sqrt{x}\sqrt{x-1}$$

gezeigt ist. Dies folgt, wenn man

$$2\sqrt{x}\sqrt{x+1} < 2x+1 \text{ und } 2\sqrt{x}\sqrt{x-1} < 2x-1$$

bewiesen hat. Dies wiederum ergibt sich aus ($x > 0$, $x+1 > 0$, $x-1 > 0$ sowie) $2x+1 > 0$, $2x-1 > 0$ und

$$4(x^2 + x) < (2x+1)^2 \text{ und } 4(x^2 - x) < (2x-1)^2.$$

Diese Ungleichungen aber treffen wegen

$$4x^2 + 4x < 4x^2 + 4x + 1 \text{ bzw. } 4x^2 - 4x < 4x^2 - 4x + 1$$

für alle x (> 1) zu. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Hinweis zur Korrektur: Man beachte, ob die erforderliche Schlußrichtung angegeben ist (wie im vorstehenden Text z. B. beim Schluß von "unten" nach "oben" durch entsprechende Textgestaltung). Ferner beachte man, ob (z. B. zum Quadrieren von Ungleichungen) erforderliche Vorzeichenvoraussetzungen berücksichtigt wurden. So ist für den vorstehenden Lösungsweg mindestens die nicht selbstverständliche Feststellung $2x-1 > 0$ zu nennen, ohne die ein Schließen von $p < (2x-1)^2$ (mit $p > 0$) auf $\sqrt{p} < 2x-1$ falsch wäre.

241033) Lösung: **8 Punkte**

Die Grundfläche $M_1M_2M_3$ des Prismas hat mit der Oberfläche des Würfels genau die Strecken M_1M_2, M_2M_3 und M_3M_1 gemeinsam. Die Deckfläche $N_1N_2N_3$ enthält keinen Punkt der Würfeloberfläche.

Legt man einen Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{2}\overline{AB}$ so, daß er A als Ecke hat und daß seine von A ausgehenden Kanten Teilstrecken von AB, AD und AE sind, so ist M_1 eine Ecke dieses Würfels, und als gegenüberliegende Ecke ergibt sich der Mittelpunkt P_1 des Quadrates ABFE (Abb. L 241033a). Daher gilt $M_1P_1 \parallel DF$; d. h., P_1 ist derjenige Punkt, in dem die Prismenkante M_1N_1 die Würfeloberfläche zum zweiten Mal (außer in M_1) durchstößt. Entsprechend durchstoßen die Kanten M_2N_2 und M_3N_3 die Würfeloberfläche in den Mittelpunkten P_2 bzw. P_3 der Quadrate BCGF bzw. EFGH.

Legt man einen Würfel der Kantenlänge $\frac{3}{4}\overline{AB}$ so, daß er B als Ecke hat und daß seine von B ausgehenden Kanten Teilstrecken von BA, BC und BF sind, so ist der Mittelpunkt Z_{12} der Strecke M_1M_2 eine Ecke dieses Würfels, und als gegenüberliegende Ecke ergibt sich derjenige Punkt Q_{12} auf BF, für den $\overline{BQ_{12}} = \frac{3}{4}\overline{AB}$ gilt (Abb. L 241033b). Daher gilt $Z_{12}Q_{12} \parallel DF$, also liegt die Strecke $Z_{12}Q_{12}$ in der Seitenfläche $M_1M_2N_2N_1$ des Prismas. Somit sind P_1Q_{12} und $Q_{12}P_2$ die (außer M_1M_2 noch auftretenden) Schnittlinien dieser Seitenfläche mit der Oberfläche des Würfels. Entsprechend gilt: Sind Q_{23} und Q_{31} diejenigen Punkte auf FG bzw. EF, für die $\overline{GQ_{23}} = \overline{EQ_{31}} = \frac{3}{4}\overline{AB}$ gilt, so sind P_2Q_{23}, $Q_{23}P_3$ bzw. P_3Q_{31}, $Q_{31}P_1$ die (außer M_2M_3, M_3M_1 auftretenden) Schnittlinien der Flächen $M_2M_3N_3N_2$ bzw. $M_3M_1N_1N_3$ mit der Oberfläche des Würfels.
Damit ist bewiesen, daß eine nach der folgenden Beschreibung durchgeführte Konstruktion die gesuchten Bilder der Schnittlinien ergibt: Man konstruiere die Bilder P_1', P_2', P_3' der Mittelpunkte P_1, P_2, P_3 der Quadrate ABFE, BCGF, EFGH, d. s. die Diagonalenschnittpunkte P_1', P_2', P_3' der Vierecke A'B'F'E', B'C'G'F', E'F'G'H'.
Ferner konstruiere man diejenigen Punkte Q_{12}', Q_{23}'; Q_{31}' auf F'B', F'G' bzw. F'E', für die $\overline{F'Q_{12}'} = \frac{1}{4}\overline{F'B'}$, $\overline{F'Q_{23}'} = \frac{1}{4}\overline{F'G'}$ bzw. $\overline{F'Q_{31}'} = \frac{1}{4}\overline{F'E'}$ gilt.
Dann sind das Dreieck $M_1'M_2'M_3'$ und das Sechseck $P_1'Q_{12}'P_2'Q_{23}'P_3'Q_{31}'$ die gesuchten Bilder der Schnittlinien.

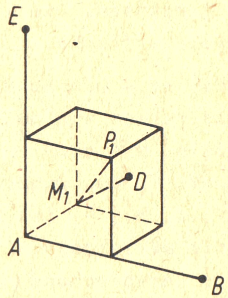


Abb. L 241033a

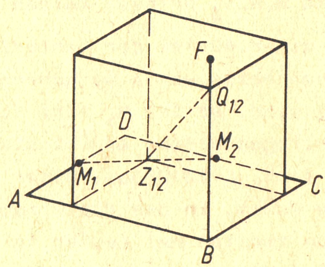


Abb. L 241033b

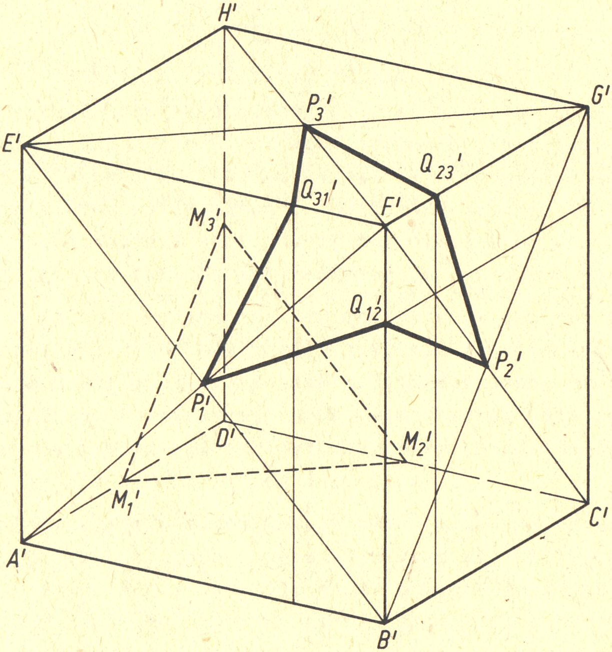


Abb. L 241033c

<u>Andere Lösungsmöglichkeiten:</u>

1. Nach Einführung eines Koordinatensystems, etwa mit $D = (0,0,0)$, $A = (1,0,0)$, $C = (0,1,0)$, $H = (0,0,1)$, berechnet man $\overrightarrow{DF} = (1,1,1)$, $M_1 = (\frac{1}{2},0,0)$ und dann $P_1 = (x,y,z)$ als Schnitt von $M_1N_1 \parallel DF$ mit der Ebene $x = 1$, also vermittels $\overrightarrow{M_1P_1} = t\cdot\overrightarrow{DF}$ und $x = 1$, d. h. $(x,y,z) = (\frac{1}{2} + t,t,t)$ und $\frac{1}{2} + t = 1$. Man erhält $t = \frac{1}{2}$, $P_1 = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ und analog P_2, P_3.
Ferner wird die Ebene durch M_1,M_2, N_2, N_1 aufgespannt von $\overrightarrow{M_1M_2} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ und $\overrightarrow{M_1N_1} \parallel \overrightarrow{DF}$; somit erhält man $Q_{12} = (u,v,w)$ als Schnitt von BF mit dieser Ebene, also vermittels
$\overrightarrow{DQ_{12}} = \overrightarrow{DB} + s\cdot\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DM_1} + p\cdot\overrightarrow{M_1M_2} + q\cdot\overrightarrow{DF}$, d. h.

$(u,v,w) = (1,1,s) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p + q, \frac{1}{2}p + q, q)$.

Man erhält $p = \frac{1}{2}$, $q = s = \frac{3}{4}$, $Q_{12} = (1,1,\frac{3}{4})$ und analog Q_{23}, Q_{31}.

2. Man konstruiert eine orthogonale Ein- oder Zweitafelprojektion des Würfels (in geeigneter Lage zur Projektionsrichtung) und darin nach bekannten Verfahren der darstellenden Geometrie den Schnitt P_1 der Geraden durch M_1 parallel zu DF mit der Ebene durch A, B, F, E sowie den Schnitt der Geraden durch B,F mit der Ebene durch M_1, N_1 parallel zu DF sowie analog P_2, P_3, Q_{23}, Q_{31}.

Bei dem für die Richtigkeit dieser Konstruktion zu erbringenden Beweis zitiert man als Satz, daß diese Verfahren jeweils den betreffenden Schnittpunkt liefern, sowie (für die Übertragung aus der Zweitafelprojektion in das Arbeitsblatt) den Satz, daß bei jeder Parallelprojektion die Teilverhältnisse unverändert bleiben.

Hinweis zur Korrektur: Werden im Beweis Aussagen über die Lage des Schnittpunktes zweier Geraden gemacht, so ist zu prüfen, ob durch die Beweisführung überhaupt erst einmal eine windschiefe Lage der Geraden ausgeschlossen wird. Eine Möglichkeit hierzu besteht (wie im obigen Beweis beim Schnitt von BF mit der Prismenseitenlinie durch Z_{12}) darin, zuerst den Schnittpunkt (hier Q_{12}) auf anderem Wege (als Punkt auf BF mit $\overline{BQ_{12}} = \frac{3}{4}\overline{AB}$) zu definieren und dann nachzuweisen, daß er auf beiden Geraden liegt (auf BF nach Definition, auf der Seitenlinie wegen $Z_{12}Q_{12} \parallel DF$).

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

241034) Lösung: **6 Punkte**

a) Es gilt $89 = 5^2 + 8^2$, $90 = 3^2 + 9^2$ sowie
$8010 = 57^2 + 69^2 = 21^2 + 87^2$ (es genügt, von diesen beiden Darstellungen eine anzugeben).

b) Nach Voraussetzung gibt es ganze Zahlen a, b, c, d mit
$s = a^2 + b^2$ und $t = c^2 + d^2$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} st &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2. \end{aligned}$$

Da mit a,b,c,d auch $ac - bd$ und $ad + bc$ ganze Zahlen sind, ist hiermit die genannte Eigenschaft von $s \cdot t$ nachgewiesen.

241035) Lösung: **7 Punkte**

a)

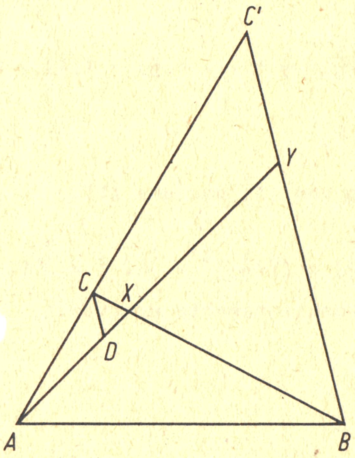


Abb. L 241035

b) Für jedes Dreieck ABC und die hierzu nach a) konstruierten Punkte C', Y und X gilt:
Ist D der Schnittpunkt von AY mit der Parallelen durch C zu BC', so folgt aus dem Strahlensatz
$\overline{CD} = \frac{1}{3}\overline{C'Y} = \frac{1}{6}\overline{BY}$ und daher
$\overline{BX} : \overline{CX} = \overline{BY} : \overline{CD} = 6$.
Damit ist der verlangte Beweis geführt und der gesuchte Wert von $\overline{BX} : \overline{CX}$ ermittelt.

Bemerkung: Mit dem (z. B. aus 211032 zu zitierenden Satz) des Menelaos, angewandt auf das Dreieck BC'C, das von der Geraden durch A und Y geschnitten wird, erhält man als Beweisweg zu b)

$\overline{BX}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{C'Y} = \overline{BY}\cdot\overline{C'A}\cdot\overline{CX}$, also $\dfrac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \dfrac{\overline{BY}}{\overline{C'Y}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{CA}} = 2 \cdot 3 = 6.$

241036) Lösung: 7 Punkte

Für jede Funktion f mit den Eigenschaften (1), (2), (3) gelten die folgenden Aussagen:

I. Es gilt $f(0) = 1$.

Beweis: Nach (2) und (3) gilt $2\cdot f(0) = f(1)\cdot f(0) = f(1+0) = f(1) = 2$ und daher $f(0) = 1$.

II. Es gilt $f(-1) = \frac{1}{2}$.

Beweis: Nach (2), (3) und I. gilt

$2\cdot f(-1) = f(1)\cdot f(-1) = f(1 + (-1)) = f(0) = 1$, also

$f(-1) = \frac{1}{2}$.

III. Es gilt $f(\frac{1}{7}) = \sqrt[7]{2}$.

Beweis: Durch wiederholte Anwendung von (3) und aus (2) folgt

$(f(\frac{1}{7}))^7 = f(\frac{1}{7})\cdot f(\frac{1}{7})\cdot \ldots \cdot f(\frac{1}{7}) = f(\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{7}) = f(1) = 2,$

also $f(\frac{1}{7}) = \sqrt[7]{2}$.

IV. Es gilt $f(\frac{3}{7}) = \sqrt[7]{8}$.

Beweis: Durch wiederholte Anwendung von (3) und aus III. folgt

$f(\frac{3}{7}) = f(\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}) = f(\frac{1}{7})\cdot f(\frac{1}{7})\cdot f(\frac{1}{7}) = (f(\frac{1}{7}))^3 = \sqrt[7]{2}^{\,3} = \sqrt[7]{8}.$

Mit I., II. und IV. sind die gesuchten Funktionswerte ermittelt.