Umlauft

A 10

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 10

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

241021

Ermitteln Sie alle diejenigen Quadrupel (a, b, c, d) von reellen Zahlen a, b, c, d, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3), (4) erfüllen!

$$a^2 + bc = 0, \qquad (1)$$
$$ab + bd = 0, \qquad (2)$$
$$ac + cd = 0, \qquad (3)$$
$$bc + d^2 = 0. \qquad (4)$$

241022

Von einem Dreieck ABC wird vorausgesetzt, daß es nicht stumpfwinklig ist und daß für die zu AB senkrechte Höhe CD die Gleichung

$$\overline{CD} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

gilt.

Beweisen Sie, daß durch diese Voraussetzungen die Größe γ des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ eindeutig bestimmt ist! Ermitteln Sie diese Winkelgröße γ !

241023

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen z, für die folgendes gilt:

Streicht man aus der Zifferndarstellung von z die letzte Ziffer, so entsteht die Zifferndarstellung einer Zahl, die ein Teiler von z ist.

A 10

241024

Die Abbildung A 241024 stellt den Grundriß eines Körpers in senkrechter Eintafelprojektion sowie den dazugehörigen Höhenmaßstab dar. Dabei ist K' der Mittelpunkt von C'D'.

Zeigen Sie, daß es mindestens zwei ebenflächig begrenzte Körper mit unterschiedlichem Volumen gibt, die diesen Grundriß, diesen Höhenmaßstab und genau die hierdurch festgelegten Punkte A, B, C, D, E, F, K als Eckpunkte haben!

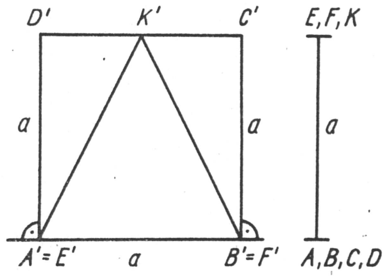

Abb. A 241024

Als Lösung genügt die Aufzählung von (mindestens zwei) Körpern der verlangten Art durch folgende Angaben: Jeweils eine Darstellung des Körpers in schräger Parallelprojektion, eine Aufzählung seiner sämtlichen Seitenflächen (in der Schreibweise, daß UV...Z dasjenige ebene Vieleck bezeichnet, das genau die Ecken U, V, ..., Z hat, die bei einer Umlaufung in dieser Reihenfolge erreicht werden) und eine Berechnung des Volumens des Körpers in Abhängigkeit von der gegebenen Länge a.

Umlauft

L 10

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

241021) Lösung: **8 Punkte**

(I) Wenn reelle Zahlen a,b,c,d das Gleichungssystem erfüllen, so folgt: Ist $b = 0$, so folgt aus (1) und (4), daß $a = 0$ und $d = 0$ gilt.

Ist $b \neq 0$, so folgt aus (1), daß $c = -\frac{a^2}{b}$ gilt, und aus (2) folgt $a + d = 0$, also $d = -a$.

Daher können nur die folgenden Quadrupel das Gleichungssystem (1), (2), (3), (4) erfüllen:

(A) Alle Quadrupel $(0,0,c,0)$ mit beliebigem reellem c,

(B) alle Quadrupel $(a, b, -\frac{a^2}{b}, -a)$ mit beliebigem reellem a und beliebigem rellem $b \neq 0$.

(II) Für jedes in (A) genannte Quadrupel gilt

$0^2 + 0 \cdot c = 0$, $0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot c + c \cdot 0 = 0$, $0 \cdot c + 0^2 = 0$,

d. h., es sind alle vier Gleichungen (1), (2), (3), (4) erfüllt.

Für jedes in (B) genannte Quadrupel gilt

$$a^2 + b \cdot (-\frac{a^2}{b}) = 0, \quad a \cdot b + b \cdot (-a) = 0,$$

$$a \cdot (-\frac{a^2}{b}) + (-\frac{a^2}{b}) \cdot (-a) = 0, \quad b \cdot (-\frac{a^2}{b}) + (-a)^2 = 0,$$

d. h., es sind ebenfalls alle vier Gleichungen (1), (2), (3), (4) erfüllt.

Mit (I) und (II) ist bewiesen: Das Gleichungssystem (1), (2), (3), (4) wird genau von allen in (A) und (B) genannten Quadrupeln erfüllt.

241022) Lösung: **10 Punkte**

Aus den Voraussetzungen folgt zunächst, daß $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ABC$ kleiner als 90° sind; denn im Fall $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ wäre $D = A$, also

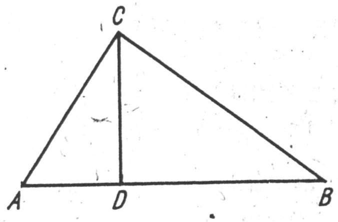

Abb. L 241022

$\overline{CA}\cdot\overline{AC} = 0\cdot\overline{BC}$; im Fall $\overline{\sphericalangle ABC} = 90^\circ$ wäre D = B, also $\overline{CB}\cdot\overline{AC} = \overline{AB}\cdot\overline{BC}$ und folglich die Hypotenuse AC ebenso lang wie die Kathete AB.

Nach Voraussetzung gilt

$$\overline{CD} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AC}.$$

Wegen $CD \perp AB$ gilt ferner

$$\overline{\sphericalangle BDC} = \overline{\sphericalangle CDA}.$$

Da diese Winkel als rechte Winkel jeweils der längsten Seite in den Dreiecken BCD bzw. CAD gegenüberliegen, folgt somit

$$\triangle BCD \sim \triangle CAD$$

und daraus

$$\overline{\sphericalangle BCD} = \overline{\sphericalangle CAD} = 90^\circ - \overline{\sphericalangle ACD}. \qquad (1)$$

Nach Voraussetzung liegt ferner D zwischen A und B, da das Dreieck ABC nicht stumpfwinklig ist. Daher gilt

$$\gamma = \overline{\sphericalangle ACB} = \overline{\sphericalangle ACD} + \overline{\sphericalangle BCD}. \qquad (2)$$

Hieraus folgt nach (1)

$$\gamma = 90^\circ.$$

Damit ist der verlangte Beweis geführt und γ ermittelt.

<u>Hinweise zur Korrektur:</u> 1. Eine kommentarlose Verwendung von (2) ohne Hinweis auf die Lage von D zwischen A und B ist nicht zu einer vollständigen Lösung ausreichend. (Eine genauere Herleitung dieser Lageaussage wird jedoch vom Schüler nicht verlangt.)

2. Ein aus $\overline{CD}:\overline{AD} = \overline{BC}:\overline{AC}$ und $\overline{\sphericalangle CAD} = \overline{\sphericalangle BAC}$ (Vgl. Hinweis 1!) über $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ verlaufender Lösungsweg stößt auf die Schwierigkeit, daß auch $\overline{CD} < \overline{AD}$ sein kann. Man kann dieser Schwierigkeit z. B. dadurch begegnen, daß man den Satz verwendet, wonach aus $\overline{CD}:\overline{AD} = \overline{BC}:\overline{AC}$ und $\overline{\sphericalangle CAD} = \overline{\sphericalangle BAC}$ auch dann $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ folgt, wenn die Voraussetzung $\overline{\sphericalangle CAD} + \overline{\sphericalangle BAC} \neq 180^\circ$ zur Verfügung steht. Dieser Satz müßte dann zitiert oder vor seiner Verwendung bewiesen werden.

<u>241023) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Wenn eine natürliche Zahl z die verlangte Eigenschaft hat, so ist $z = 10a + b$ mit natürlichen Zahlen a und b, für die $a > 0$ und $0 \leqq b \leqq 9$ gilt und a ein Teiler von $10a + b$ ist. Dann ist $10a + b$ und folglich auch b ein (ganzzahliges) Vielfaches von a, also a ein Teiler von b.

Umgekehrt gilt: Wenn a und b natürliche Zahlen mit $a > 0$ und $0 \leqq b \leqq 9$ sind, für die a ein Teiler von b ist, so ist b und folglich auch $10a + b$ ein Vielfaches von a, also hat dann $z = 10a + b$ die verlangte Eigenschaft.[1]
Daher erhält man genau alle gesuchten Zahlen z, indem man b alle natürlichen Zahlen mit $0 \leqq b \leqq 9$ und hierzu jeweils a alle positiven Teiler von b durchlaufen läßt. Das ergibt die folgende Aufzählung aller gesuchten Zahlen:

b	0	1	2		3		4		
a	alle nat. $a \geqq 1$	1	1	2	1	3	1	2	4
z	alle $10 \cdot a$ mit nat. $a \geqq 1$	11	12	22	13	33	14	24	44

b	5		6				7		8				9		
a	1	5	1	2	3	6	1	7	1	2	4	8	1	3	9
z	15	55	16	26	36	66	17	77	18	28	48	88	19	39	99

---

1 Statt dieser mehr verbalen Darstellung kann man auch in Formeln von $a \mid (10a + b)$ auf $10a + b = na$, $b = (n - 10)a$ mit natürlichem n, $a \mid b$ und umgekehrt schließen.

<u>241024) Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

Die Abbildungen L 241024 a bis e zeigen fünf Beispiele von Körpern der gesuchten Art in schräger Parallelprojektion. (Die punktierten Würfel-Umrißlinien, die den räumlichen Eindruck unterstützen sollen, werden nicht vom Schüler verlangt.) Als Lösung genügt es, zwei derartige Darstellungen und die zugehörigen Angaben aufzuführen.

Zu a: Seitenflächen: ABCD, ADE, ABFE, BCF, CFK, CDK, DEK, EFK.
Der Körper kann gebildet werden, indem man von dem Würfel ABCDEFGH die Pyramiden CGFK (Grundfläche CGF mit Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2$, Länge der zugehörigen Höhe $\overline{GK} = \frac{1}{2}a$, also Volumen $\frac{1}{12}a^3$) und DHEK (zu CGFK spiegelbildlich) abschneidet. Daher beträgt das Volumen des Körpers $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{12}a^3 = \frac{5}{6}a^3$.

Zu d: Seitenflächen: ABCD, ADE, AEK, ABK, BFK, BCF, CFK, CDK, DEK.
Von ABCDEFGH abgeschnitten: CGFK, DHEK (wie in a), ABFEK (Grundfläche ABFE mit Inhalt a^2, Höhenlänge a (Lot von K auf EF)).
Volumen des Körpers: $a^3 - 2\cdot\frac{1}{12}a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{2}a^3$.

Zu e: Seitenflächen: ABCD, ADE, AEK, AFK, ABF, BFK, BCK, CDK, DEK.
Von ABCDEFGH abgeschnitten: BCGFK, DHEK (wie in b), AEFK (Grundfläche AEF mit Inhalt $\frac{1}{2}a^2$, Höhenlänge a).
Volumen des Körpers: $a^3 - \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{12}a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{7}{12}a^3$.

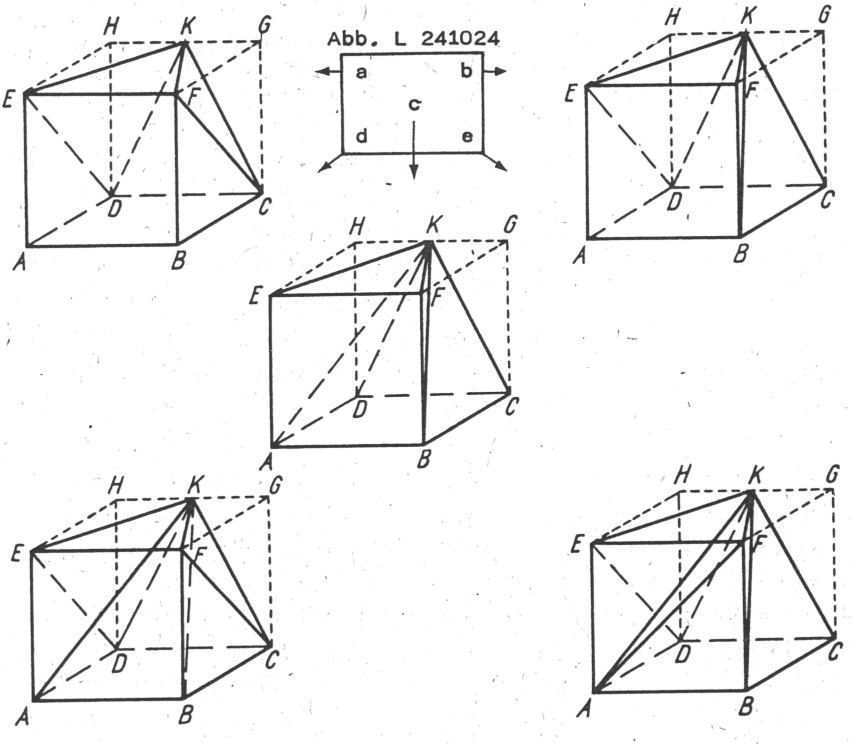

Abb. L 241024

Zu b: Seitenflächen: ABCD, ADE, ABFE, BFK, BCK, CDK, DEK, EFK.
Von ABCDEFGH abgeschnitten: BCGFK (Grundfläche BCGF mit Inhalt a^2, Höhenlänge $\overline{GK} = \frac{1}{2}a$), DHEK (Grundfläche DHE mit Inhalt $\frac{1}{2}a^2$, Höhenlänge $\overline{HK} = \frac{1}{2}a$).
Volumen des Körpers: $a^3 - \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{12}a^3 = \frac{3}{4}a^3$.

Zu c: Seitenflächen: ABCD, ADK, AEK, ABFE, BFK, BCK, CDK, EFK.
Von ABCDEFGH abgeschnitten: BCGFK (wie in b), ADHEK (spiegelbildlich). Volumen des Körpers: $a^3 - 2\cdot\frac{1}{6}a^3 = \frac{2}{3}a^3$.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 10 Gesamtpunktzahl: 40

241021 8 Punkte

Notwendige Bedingung für

$b = 0$: $(a, b, c, d) = (0, 0, c, 0)$ 3 Punkte

$b \neq 0$: $(a, b, c, d) = (a, b, -\frac{a^2}{b}, -a)$ 3 Punkte

Nachweis, daß obige Quadrupel Lösungen sind (Probe) (was auch mit äquivalenten Umformungen ersetzt werden kann) 2 Punkte

241022 10 Punkte

Fehlt der Hinweis auf die Voraussetzung der Spitzwinkligkeit, ist ein Punkt abzuziehen.

241023 10 Punkte

Ableitung einer allgemeinen notwendigen und hinreichenden Bedingung 5 Punkte

Ermittlung der Zahlen z aus dieser Bedingung 5 Punkte

(Werden einige der Zahlen durch Probieren gefunden, können bis 2 Punkte erteilt werden)

241024

je Körper

Darstellung	2 Punkte
Aufzählung der Flächen	1 Punkt
Volumen	3 Punkte
für beide Körper	insgesamt 12 Punkte