A 9;I

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

240931

Beweisen Sie, daß es keine vierstellige Quadratzahl z mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt!

(1) Die erste und die dritte Ziffer von z sind einander gleich.

(2) Die zweite und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.

240932

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien der Kreis k um den Ursprung mit dem Radius $\sqrt{2}$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x + 10$ gezeichnet.

Ermitteln Sie Gleichungen für die beiden zu g parallelen Tangenten an k!

240933

Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge a. Der Mittelpunkt der Kante AB sei M, der Mittelpunkt der Kante CD sei N.

a) Beweisen Sie, daß die Gerade durch M und N sowohl auf der Geraden g durch A und B als auch auf der Geraden h durch C und D senkrecht steht!

b) Ermitteln Sie den Abstand $\overline{MN}$ zwischen M und N!

c) Beweisen Sie, daß für jeden Punkt X auf g und jeden Punkt Y auf h der Abstand $\overline{XY}$ zwischen X und Y die Ungleichung $\overline{XY} \geqq \overline{MN}$ erfüllt!

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

240934

Bei einer Diskussion in der mathematischen Arbeitsgemeinschaft berichtet Norbert, er habe eine Quadratzahl $n^2 > 1$ als Summe von n natürlichen Zahlen dargestellt, von denen keine zwei einander gleich waren. Anke meint: "Es gibt sogar unendlich viele Quadratzahlen $n^2 > 1$, die jeweils als Summe von n natürlichen Zahlen darstellbar sind, unter denen sich keine zwei gleichen befinden." Bernd fragt: "Gibt es auch Quadratzahlen $n^2 > 1$, die sich als Summe von 2n natürlichen Zahlen darstellen lassen, unter denen es keine zwei gleichen gibt?"

a) Beweise Ankes Aussage!

b) Beantworte Bernds Frage!

240935

Beweisen Sie, daß für die Kathetenlängen a, b und die Hypotenusenlänge c jedes rechtwinkligen Dreiecks die Ungleichung $a^5 + b^5 < c^5$ gilt!

240936

Es sei AB eine Strecke und P ein Punkt auf der Verlängerung von BA über A hinaus. Von P werden an alle diejenigen Kreise, die AB als Sehne haben, die Tangenten gelegt.
Beweisen Sie, daß es dann einen Kreis um P gibt, auf dem die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen!

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

240931) Lösung: 6 Punkte

Hat eine vierstellige Zahl z die Eigenschaften (1) und (2) und sind a bzw. b die erste bzw. zweite Ziffer von z, so gilt

$$z = 1000a + 100b + 10a + b = 101(10a + b),$$

also ist z durch die Primzahl 101 teilbar. Wäre z eine Quadratzahl, so müßte der Primfaktor 101 in geradzahliger Potenz in z auftreten; d. h., z wäre durch 101^2 teilbar. Wegen $101^2 > 100^2 = 10000$ stünde dies im Widerspruch zur Vierstelligkeit von z. Daher kann es keine vierstellige Quadratzahl z mit den Eigenschaften (1) und (2) geben.

Bemerkung: Möglich (wenn auch wenig empfehlenswert) ist eine Lösung dieser Aufgabe durch vollständige Aufzählung aller Quadratzahlen von 32^2 bis 99^2, ergänzt durch die Feststellungen, daß die natürlichen Zahlen $n \leqq 31$ und $n \geqq 100$ wegen $n^2 \leqq 961$ bzw. $n^2 \geqq 10000$ keine vierstelligen Quadrate haben.

240932) Lösung: 7 Punkte

Die Radien zu den Berührungspunkten der genannten Tangenten verlaufen senkrecht zu diesen Tangenten, also auch zu g. Daher ergeben sich die Berührungspunkte, indem man die zu g senkrechte Gerade h durch den Ursprung mit dem Kreis k schneidet. Die Gerade g ist parallel zu der durch den II. und IV. Quadranten verlaufenden Winkelhalbierenden der x- und y-Achse. Daher ist h die durch den I. und III. Quadranten verlaufende Winkelhalbierende der Achsen, d. h. die Gerade mit der Gleichung

$$y = x. \tag{1}$$

Der Kreis k hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 2. \tag{2}$$

Die Koordinaten $(x;y)$ der Berührungspunkte sind die Lösungen des Gleichungssystems (1),(2). Dieses ist äquivalent mit $y = x$, $2x^2 = 2$ und dies mit $y = x$, $x^2 = 1$. Also gibt es genau die Berührungspunkte mit den Koordinaten $(x_1;y_1) = (1;1)$, $(x_2;y_2) = (-1;-1)$.

Die Tangenten t_1, t_2 sind die Geraden durch diese Punkte parallel zu g, also mit demselben Anstieg (-1) wie g. Sie haben die Gleichungen

$$t_1\colon (y-1) = -1\cdot(x-1), \text{ d. h. } y = -x + 2$$

bzw. $$t_2\colon (y+1) = -1\cdot(x+1), \text{ d. h. } y = -x - 2.$$

<u>Hinweis:</u> Als geforderte Gleichungen der Tangente sind auch Parameterdarstellungen zu akzeptieren, z. B. für t_1 die Darstellung

$$\left\{\begin{matrix} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \end{matrix}\right\} \quad t \in R.$$

<u>240933) Lösung:</u>

<u>7 Punkte</u>

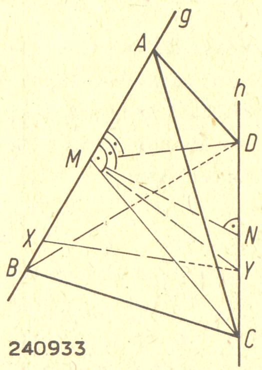

Abb. L 240933

a) Die Seitenhalbierende CM im gleichseitigen Dreieck ABC ist zugleich Höhe; d. h., es gilt $CM \perp g$. Ebenso gilt $DM \perp g$. Daher steht die Ebene durch C,D,M senkrecht auf g; dies gilt folglich auch für die in dieser Ebene gelegene Gerade durch M und N. Ebenso beweist man (aus $AN \perp h$ und $BN \perp h$), daß diese Gerade senkrecht auf h steht.

b) Im gleichseitigen Dreieck ABC ist $\overline{CM} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Ferner ist $\overline{CN} = \frac{a}{2}$. Daher ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle CMN$:

$$\overline{MN} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

c)[1] Für jeden Punkt X auf g und jeden Punkt Y auf h gilt:
Da die Ebene durch C,D,M senkrecht auf g steht, ist auch $MY \perp g$. Daraus folgt

$$\overline{XY} \geqq \overline{MY};$$

denn im Fall $X = M$ gilt das Gleichheitszeichen, und im Fall $X \neq M$ ist MXY ein rechtwinkliges Dreieck mit XY als Hypotenuse.

Ebenso gilt wegen $MN \perp h$

$$\overline{MY} \geqq \overline{MN}.$$

Damit ist $\overline{XY} \geqq \overline{MN}$ bewiesen.

---

1 Anstelle eines expliziten Beweises wie oben kann auch ein (korrekt ausgeführtes) Zitat des folgenden Satzes akzeptiert werden: "Sind g und h zwei windschiefe Geraden und liegen M auf g bzw. N auf h so, daß $MN \perp g$ und $MN \perp h$ gelten, so ist MN unter allen Strecken (X auf g, Y auf h) die kürzeste." Die Aussage, daß es nur ein Paar (M;N) mit $M \in g$; $N \in h$; $MN \perp g, h$ gibt, wird hier nicht benötigt.

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

240934) Lösung: 6 Punkte

a) Für jede natürliche Zahl $n > 1$ ist

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1),$$

also $$1 + 2 + \ldots + (n-1) + \frac{1}{2}n(n+1) = n^2.$$

In dieser Darstellung von n^2 sind die Summanden $1, 2, \ldots, n-1$ sämtlich verschieden, und der letzte Summand ist ganzzahlig[1] und erfüllt

$$\frac{1}{2}n(n+1) > \frac{1}{2}n(1+1) = n,$$

ist also ebenfalls von allen vorangehenden Summanden verschieden.

Daher läßt sich sogar jede Quadratzahl $n^2 > 1$ als Summe von jeweils n verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen, womit Ankes Aussage bewiesen ist.

b) In jeder Summe s aus $2n$ verschiedenen natürlichen Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ kann o.B.d.A. $z_1 < z_2 < \ldots < z_{2n}$ angenommen werden, und dann gilt $z_1 \geqq 0$, $z_2 \geqq 1, \ldots, z_{2n} \geqq 2n-1$, also gilt wegen $n > 1$ für jede solche Summe

$$s \geqq 1 + \ldots + 2n-1 = \frac{1}{2}(2n-1)2n = 2n^2 - n > 2n^2 - n^2 = n^2.$$

Daher gibt es keine Quadratzahl $n^2 > 1$, die sich als Summe von $2n$ sämtlich verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen läßt.

---

1 Beweis: Da n oder $n+1$ gerade ist, ist $\frac{1}{2}n(n+1)$ ganzzahlig. Eine ausführliche Formulierung dieses Beweisschrittes wird vom Schüler nicht verlangt.

240935) Lösung: 6 Punkte

Da im rechtwinkligen Dreieck die Katheten kürzer sind als die Hypotenuse, gilt $a < c$ und $b < c$, also $a^3 < c^3$ und $b^3 < c^3$. Hieraus und aus dem Satz des Pythagoras folgt

$$a^5 + b^5 < a^2 \cdot c^3 + b^2 \cdot c^3 = (a^2 + b^2) \cdot c^3 = c^2 \cdot c^3 = c^5,$$

w.z.b.w.

240936) Lösung: **8 Punkte**

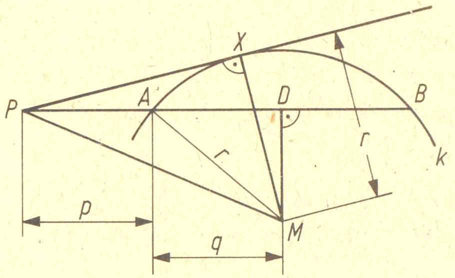

Abb. L 240936

Es sei k ein Kreis, der AB als Sehne besitzt; M sei der Mittelpunkt und r der Radius von k. Der Berührungspunkt einer von P an k gelegten Tangente sei X; dann gilt $MX \perp PX$.
Der Mittelpunkt von AB sei D; dann ist (im Fall $M \neq D$) $MD \perp AB$, und mit $\overline{AP} = p$, $\overline{AD} = q$ gilt dann nach dem Satz des Pythagoras (bzw. im Fall M = D wegen $\overline{AM} = \overline{AD} = r$, $\overline{DM} = 0$)

$$\overline{DM}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AD}^2 = r^2 - q^2,$$
$$\overline{PM}^2 = \overline{PD}^2 + \overline{DM}^2 = (p+q)^2 + r^2 - q^2 = p^2 + 2pq + r^2,$$
$$\overline{PX}^2 = \overline{PM}^2 - \overline{MX}^2 = p^2 + 2pq.$$

Damit ist einheitlich für die Berührungspunkte X aller genannten Tangenten die Länge von PX durch die Konstanten p und q bestimmt und somit selbst konstant. Also liegen alle diese Berührungspunkte auf einem Kreis um P, w.z.b.w.

<u>Anderer Lösungsweg:</u>
Für jeden der genannten Berührungspunkte X gilt $\overline{\sphericalangle APX} = \overline{\sphericalangle XPB}$ sowie nach dem Satz über Peripheriewinkel und Sehnen-Tangenten-Winkel $\overline{\sphericalangle AXP} = \overline{\sphericalangle XBP}$. (Dieser Satz kann entweder als bekannt zitiert oder mit Hilfe des Satzes über Peripheriewinkel und Zentriwinkel bewiesen werden: $\overline{\sphericalangle AXP} = 90^\circ - \overline{\sphericalangle AXM} = \frac{1}{2}\overline{\sphericalangle XMA} = \overline{\sphericalangle XBA}$.)
Nach dem Hauptähnlichkeitssatz ist somit $\triangle APX \sim \triangle XPB$ und daher $\overline{PA} : \overline{PX} = \overline{PX} : \overline{PB}$, $\overline{PX}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ konstant.
(Damit wurde der "Sehnen-Tangenten-Satz" bewiesen. Es genügt auch das Zitieren dieses Satzes.)