Umlauft

A 9

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

240921

Eine Schule hat 510 Schüler. Beim Anfertigen einer Schülerliste stellt jemand die Frage, ob auf derartigen Listen von 510 Personen mehrmals das gleiche Datum (Tag- und Monatsangabe, ohne Berücksichtigung der Jahresangabe) als Geburtstag auftreten wird.

Anke behauptet: "Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden läßt, befinden sich zwei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben."

Bertold behauptet: "Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden läßt, befinden sich drei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben."

Untersuche sowohl für Ankes als auch für Bertolds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

240922

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x mit $x \neq 5$, für die

$$\frac{x}{5-x} < 4$$

gilt.

240923

Es sei ABCD ein Quadrat. Für zwei verschiedene Punkte E und F, die in irgend einer Reihenfolge auf der Seite BC zwischen B und C

A 9

liegen, gelte $\overline{BE} = \overline{FC}$

und $\overline{BE} : \overline{EF} = 41 : 11.$

Die Gerade durch A und E sei g, die Gerade durch D und F sei h, der Schnittpunkt von g und h sei S.

Untersuchen Sie, ob bei einer Lage von Punkten A, B, C, D, E, F, S, die diese Voraussetzungen erfüllt, das Dreieck EFS gleichseitig ist!

<u>240924</u>

Beweisen Sie: Sind a und b beliebige ganze Zahlen, wobei nur $b \neq 0$ vorausgesetzt wird, so ist die Zahl

$$z = a^5 + 3a^4b - 5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5$$

das Produkt aus fünf ganzen Zahlen, von denen keine zwei einander gleich sind!

Umlauft

L 9

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

240921) Lösung: 8 Punkte

Ankes Behauptung ist wahr. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden:[1] Gäbe es eine Liste, in der 510 Personen stehen, von denen keine zwei das gleiche Datum als Geburtstag haben, so gäbe es mindestens 510 verschiedene Daten, d. h. mindestens 510 verschiedene Tage im Jahr. Da das nicht zutrifft, gibt es keine solche Liste, w. z. b. w.

Bertolds Behauptung ist falsch. Beispielsweise kann man eine Liste von 510 Personen so zusammenstellen, daß jeder der ersten 255 Tage des Jahres das Geburtsdatum von genau 2 dieser Personen ist. Auf einer solchen Liste befinden sich dann keine drei Personen mit gleichem Geburtstag, w. z. b. w.

---

1 Statt einer expliziten Beweisdarstellung kann auch eine Berufung auf die (zu zitierende) Schlußweise des "Schubfachschlusses" akzeptiert werden.

240922) Lösung: 9 Punkte

(a) Für jedes reelle $x < 5$ ist das Bestehen der Ungleichung

$$\frac{x}{5 - x} < 4$$

äquivalent (wie das Multiplizieren mit der positiven Zahl $5 - x$ bzw. für die umgekehrte Schlußweise das Dividieren durch diese Zahl zeigt) mit $x < 20 - 4x$,

dies mit $5x < 20$

und dies mit $x < 4$.

(b) Für jedes reelle $x > 5$ ist das Bestehen der Ungleichung

$$\frac{x}{5 - x} < 4$$

äquivalent (wie das Multiplizieren mit der negativen Zahl $5 - x$

bzw. für die umgekehrte Schlußweise das Dividieren durch diese Zahl zeigt) mit $x > 20 - 4x$,
dies mit $x > 4$, was aber bereits für alle Zahlen $x > 5$ gilt, d. h. für diese mit der ursprünglichen Bedingung

$$x > 5$$

äquivalent ist.

Da für jedes reelle $x \neq 5$ entweder $x < 5$ oder $x > 5$ gilt, ist mit (a) und (b) bewiesen: Die gesuchten Zahlen sind genau diejenigen reellen Zahlen x, für die

$$x < 4 \quad \text{oder} \quad x > 5$$

gilt.

<u>Hinweis:</u>

Werden statt logischer Äquivalenzen Schlüsse formuliert, die (von $\frac{x}{5 - x} < 4$ ausgehend) nur in einer Richtung verlaufen, so ist anschließend die umgekehrte Schlußrichtung (die "Probe") erforderlich, z. B. folgendermaßen:

Für alle $x < 4$ gilt einerseits $5x < 20$, also $x < 20 - 4x$, andererseits erst recht $x < 5$. Also kann man die zuvor erhaltene Ungleichung durch $5 - x$ dividieren und erhält $\frac{x}{5 - x} < 4$.

Für alle $x > 5$ gilt[1] einerseits erst recht $x > 4$, $5x > 20$, also $x > 20 - 4x$, andererseits kann man diese Ungleichung durch $5 - x$ dividieren und erhält $\frac{x}{5 - x} < 4$.

<u>Hinweis zur Formulierung der Lösungsangabe:</u>

Die Lösungsangabe kann auch folgendermaßen formuliert werden:

Die gesuchten Zahlen sind

alle reellen Zahlen x mit $x < 4$

und alle reellen Zahlen x mit $x > 5$

und nur diese.

Bei der Korrektur ist also der Formulierungszusammenhang, in dem die Wörter "oder" bzw. "und" auftreten, entscheidend zu berücksichtigen.

Statt "oder" kann auch "entweder - oder" stehen, wenn (wie hier) einander ausschließende Aussagen ($x < 4$, $x > 5$) verknüpft werden.

<u>240923) Lösung:</u> <u>11 Punkte</u>

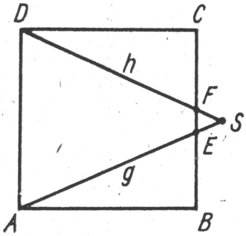

Abb. L 240923 a

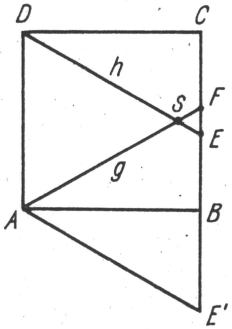

Abb. L 240923 b

Aus $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{\sphericalangle ABE} = \overline{\sphericalangle DCF}$ und $\overline{BE} = \overline{FC}$ folgt $\triangle ABE \cong \triangle DCF$, also $\overline{\sphericalangle BAE} = \overline{\sphericalangle CDF}$. Daher ist $\triangle ADS$ gleichschenklig mit $\overline{\sphericalangle DAS} = \overline{\sphericalangle ADS}$. Wegen $\overline{\sphericalangle FES} = \overline{\sphericalangle DAS}$ und $\overline{\sphericalangle EFS} = \overline{\sphericalangle ADS}$ (entweder Stufenwinkel oder Wechselwinkel) ist folglich auch $\triangle EFS$ gleichschenklig mit $\overline{\sphericalangle FES} = \overline{\sphericalangle EFS}$.

(a) Liegen die Punkte B,E,F,C in dieser Reihenfolge auf BC, so gilt $\overline{AS} > \overline{AE}$. Da ferner AE im rechtwinkligen Dreieck ABE als Hypotenuse die längste Seite ist, gilt erst recht $\overline{AS} > \overline{AB} = \overline{AD}$. Somit ist das Dreieck ADS nicht gleichseitig; es gilt $60^\circ \neq \overline{\sphericalangle ASD} = \overline{\sphericalangle ESF}$; also ist auch das Dreieck EFS nicht gleichseitig.

(b) Liegen die Punkte B,F,E,C in dieser Reihenfolge auf BC, so gilt: Wäre $\triangle EFS$ gleichseitig, also $\overline{\sphericalangle FES}$ $(= \overline{\sphericalangle BEA}) = 60^\circ$, so wäre für den Bildpunkt E' von E bei Spiegelung an AB (der wegen $EB \perp AB$ auf der Verlängerung von EB liegt) $\triangle AEE'$ gleichseitig. Daher wäre $\overline{AE} = \overline{E'E} = 2 \cdot \overline{BE}$. Zerlegt man BE in 41 gleichlange Teilstrecken, von denen nach Voraussetzung 11 auf FE, also 30 auf BF kommen, so hätte $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FC} =$ $= \overline{BF} + \overline{BE}$ die Länge von $30 + 41 = 71$ Teilstrecken. Nach dem Satz des Pythagoras müßte dann $\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$, also $71^2 + 41^2 = (2 \cdot 41)^2$ gelten. Es ist aber $71^2 + 41^2 =$ $= 5041 + 1681 = 6722$ und $(2 \cdot 41)^2 = 82^2 = 6724$. Dieser Widerspruch beweist, daß $\triangle EFS$ nicht gleichseitig sein kann.

<u>2. Lösungsweg zu b)</u> (in geeigneter Modifikation auch brauchbar zu (a)): Wie im 1. Lösungsweg erhält man aus der Annahme, $\triangle EFS$ wäre gleichseitig, daß $\overline{BE}$ halbe Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks ($\triangle AEE'$) mit der Höhenlänge $\overline{AB} = \overline{BC}$ wäre. Daraus ergäbe sich $\overline{BC} : \overline{BE} = \sqrt{3}$.

Andererseits ist nach Voraussetzung $\frac{\overline{EF}}{\overline{BE}}$ eine rationale Zahl, also auch $\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BE} + \overline{FC} - \overline{EF}}{\overline{BE}} = 2 - \frac{\overline{EF}}{\overline{BE}}$ (für (a): $\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = 2 + \frac{\overline{EF}}{\overline{BE}}$). Dieser Widerspruch[1] beweist, daß die Annahme falsch war, also $\triangle$ EFS nicht gleichseitig ist.

<u>Hinweis:</u> Bei dieser Aufgabe kann zum Lösungsteil (a) auch eine mit Zeichengenauigkeit durchgeführte Konstruktion als Beweismittel anerkannt werden, da z. B. eine Zeichnung mit $\overline{BE} = \overline{FC} = 41$ mm, $\overline{EF} = 11$ mm auf die offensichtlich verschiedenen Längen $\overline{AD} = 93$ mm, $\overline{AS} \approx 115{,}27$ mm bzw. auf die offensichtlich von 60° verschiedene Winkelgröße $\overline{\sphericalangle ASD} \approx 47{,}58^\circ$ führt. Im Lösungsteil (b) versagt dagegen ein derartiger zeichnerischer Ansatz, da z. B. $\overline{BE} = \overline{FC} = 41$ mm, $\overline{EF} = 11$ mm zu $\overline{AD} = 71$ mm sowie auf 4 Dezimalen genau zu $\overline{AS} = 70{,}9894$ mm, $\overline{\sphericalangle ASD} = 60{,}0098^\circ$ führt.

<u>240924) Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

Es gilt

$$z = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a - 2b) \cdot (a + 2b) \cdot (a + 3b), \quad (1)$$

was man durch Ausmultiplizieren bestätigen kann.

Von den in (1) auftretenden Faktoren sind keine zwei einander gleich; denn aus $a + nb = a + n'b$ (n, n' zwei verschiedene der Zahlen $-1, 1, -2, 2, 3$) folgte $(n - n') \cdot b = 0$ und daraus wegen $n \neq n'$, also $n - n' \neq 0$ weiter $b = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

---

1 Die hier verwendete Irrationalität von $\sqrt{3}$ kann als bekannter Sachverhalt zitiert werden. Man kann auch aus $\frac{\overline{EF}}{\overline{BE}} = \frac{11}{41}$ zu der konkreten Folgerung $\sqrt{3} = 2 - \frac{11}{41} = \frac{71}{41}$ (für (a): $\frac{93}{41}$) kommen und $3 \cdot 41^2 = 71^2$ (bzw. $3 \cdot 41^2 = 93^2$) durch Nachrechnen widerlegen. Eine alleinige Verwendung des (etwa aus der Zahlentafel entnommenen) Näherungswertes $\sqrt{3} = 1{,}732$ genügt dagegen nicht, da dieser nur den Schluß auf das Intervall $1{,}7315 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}7325$ zuläßt, das auch die Zahl $\frac{71}{41}$ enthält.

L 9

<u>Bemerkung zur Lösungsfindung:</u>

Man kann z. B. folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} z &= a \cdot (a^4 - 5a^2b^2 + 4b^4) + 3b \cdot (a^4 - 5a^2b^2 + 4b^4) \\ &= (a^4 - 5a^2b^2 + 4b^4) \cdot (a + 3b) \\ &= (a^2 - b^2) \cdot (a^2 - 4b^2) \cdot (a + 3b). \end{aligned}$$

Damit erhält man (1).

Für eine vollständige Lösungsangabe ist eine derartige Hinführung zu (1) nicht erforderlich; es genügt auch, (1) durch Ausmultiplizieren zu bestätigen.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 9	Gesamtpunktzahl: 40
<u>240921</u>	8 Punkte
Nachweis, daß Ankes Behauptung wahr ist	4 Punkte
Nachweis, daß Bertolds Behauptung falsch ist	4 Punkte
<u>240922</u>	9 Punkte
Ableitung der notwendigen Bedingung $x < 4$	3 Punkte
Ableitung der notwendigen Bedingung $x > 5$	3 Punkte
Hinweis auf die Äquivalenz der benutzten Umformungen bzw. Nachweis, daß obige Bedingungen auch hinreichend sind	2 Punkte
Angabe der Lösungsmenge	1 Punkt
<u>240923</u>	11 Punkte
Erkennen der beiden Fälle	1 Punkt
Fall a)	5 Punkte
Fall b)	5 Punkte
<u>240924</u>	12 Punkte
Produktdarstellung	6 Punkte
Nachweis, daß alle Faktoren dieser Produktdarstellung paarweise verschieden sind	6 Punkte