A 8;I

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

240831

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen, deren sechste Potenz in ihrer dekadischen Zifferndarstellung genau je einmal die Ziffern 2, 4, 5, genau je zweimal die Ziffern 8, 9 und keine weitere Ziffer enthält!

240832

Um die Haltbarkeit eines Motorradreifentyps zu ermitteln, wurden zwei Reifen getestet. Dabei wurde festgestellt, daß der Reifen auf dem Hinterrad nach 15 000 gefahrenen Kilometern und der Reifen auf dem Vorderrad nach 25 000 gefahrenen Kilometern nicht mehr die erforderliche Profiltiefe hatte und damit abgenutzt war.

a) Es soll nun erreicht werden, daß zwei solche Reifen gleichzeitig abgenutzt sind, indem man sie nach einer bestimmten Anzahl gefahrener Kilometer gegeneinander austauscht.
Ermittle diese Kilometerzahl!

b) Nach wieviel Kilometern sind unter den Voraussetzungen der Teilaufgabe a) beide Reifen abgenutzt?

Es werde angenommen, daß sowohl auf dem Vorderrad als auch auf dem Hinterrad die Abnutzung jeweils proportional zur Fahrstrecke ist.

A 8;I

240833

Konstruiere ein nicht überschlagenes Viereck ABCD, das die folgenden Bedingungen (I) bis (V) erfüllt!

(I) Die Seite AB hat die Länge a = 7,0 cm.

(II) C liegt auf der Mittelsenkrechten p der Strecke AB.

(III) D liegt auf der Mittelsenkrechten q der Strecke AC.

(IV) A liegt auf der Mittelsenkrechten r der Strecke BD.

(V) Die Geraden p und q schneiden sich in einem Punkt S, der auf der Strecke AB liegt.

Beschreibe deine Konstruktion! Beweise, daß jedes Viereck, das die geforderten Eigenschaften hat, nach deiner Beschreibung konstruiert werden kann! Beweise, daß jedes Viereck, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die geforderten Eigenschaften hat!

Hinweis: Ein Viereck ABCD heißt genau dann "nicht überschlagen", wenn die Strecken AB und CD sich nicht schneiden und die Strecken AD und BC sich nicht schneiden.

A 8;II

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

240834

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. In diesem Dreieck sei CS die Seitenhalbierende von AB, CW die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ und CH die Höhe auf AB.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{\sphericalangle SCW} = \overline{\sphericalangle WCH}$ gilt!

240835

Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB; deren Länge sei 3 cm, der Umfang des Dreiecks betrage 13 cm. Eine Parallele zu AB schneide die Strecke AC in einem Punkt D zwischen A und C sowie die Strecke BC in einem Punkt E. Der Umfang des Vierecks ABED betrage 7,4 cm.
Beweise, daß durch diese Voraussetzungen die Länge der Strecke AD eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Länge!

240836

Zwei Motorradfahrer unternehmen eine Fahrt, auf der beide die gleiche Entfernung zurücklegen. Sie starten gleichzeitig und kommen gleichzeitig am Ziel an. Dabei benötigt A doppelt so viel Zeit zum Fahren wie B zum Rasten. B dagegen fuhr dreimal so lange, wie A rastete.
Welcher der beiden Fahrer hatte die längere Rastzeit?

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

__Lösungen und Punktbewertung__

Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

__Achtung:__ Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

__240831) Lösung:__ __5 Punkte__

I. Wenn eine natürliche Zahl a die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:

a^6 ist siebenstellig, also gilt

$$1000000 \leqq a^6 \leqq 9999999.$$

Wegen $15^6 = (225\cdot 15)^2 > 3300^2 > 9999999$ folgt hieraus

$$10 \leqq a \leqq 14.$$

Da 10^6 auf die Ziffer 0 endet, 11^6 auf die Ziffer 1 sowie 14^2 und daher auch $14^6 = (14^2)^3$ auf die Ziffer 6, kann a nur eine der Zahlen 12, 13 sein. Da $13^3 = 169\cdot 13$ auf die Ziffernfolge ...97 und somit $13^6 = (13^3)^2$ auf die Ziffernfolge ...09 endet, verbleibt nur die Möglichkeit a = 12.

II. In der Tat ist $12^6 = 2985984$, woraus ersichtlich ist, daß die Zahl 12 alle geforderten Eigenschaften hat.

Daher hat genau die Zahl 12 die geforderten Eigenschaften.

__240832) Lösung:__ __7 Punkte__

Würde man sowohl auf dem Vorderrad als auch auf dem Hinterrad jeden Reifen erst nach seiner vollständigen Abnutzung durch einen neuen Reifen ersetzen, so müßte ein solcher Reifenwechsel auf dem Vorderrad nach 25 000 km, 50 000 km, 75 000 km, ... usw. und auf dem Hinterrad nach 15 000 km, 30 000 km, 45 000 km, 60 000 km, 75 000 km, ... usw. erfolgen.

Daher würden bei diesem Vorgehen erstmals nach 75 000 km Vorderradreifen und Hinterradreifen gleichzeitig gewechselt, und bis dahin wären drei Vorderradreifen und fünf Hinterradreifen, also insgesamt acht Reifen verbraucht.

Wenn man mit acht Reifen insgesamt 75 000 km fahren kann, dann kann man mit zwei Reifen insgesamt $\frac{75\,000}{4}$ km = 18 750 km zurücklegen. Dabei muß jeder der beiden Reifen die gleiche Strecke als Vorder- wie als Hinterradreifen zurücklegen, damit beide Reifen denselben Abnutzungsbedingungen unterworfen sind. D. h., die Reifen müssen nach $\frac{18\ 750}{2}$ km = 9375 km ausgetauscht werden.

Die in a) bzw. b) gesuchten Kilometerangaben lauten also 9375 km bzw. 18 750 km.

2. Lösungsweg, Variante 1:

Es sei x die Anzahl der Kilometer bis zu dem in Aufgabe a) beschriebenen Austauschen der beiden Reifen, es sei y die Anzahl der Kilometer von diesem Austauschen bis zur völligen Abnutzung beider Reifen, also (x+y) die Anzahl der Kilometer, die gemäß a) insgesamt gefahren werden.
Nach 25 000 km wäre der Vorderradreifen voll abgenutzt. Also beträgt der Anteil der Abnutzung nach x Kilometern genau $\frac{x}{25\ 000}$.
Nach dem Austauschen läuft dieser Reifen noch y Kilometer als Hinterradreifen. Hierbei beträgt der Anteil der Abnutzung $\frac{y}{15\ 000}$. Nach (x+y) Kilometern ist dieser Reifen voll abgenutzt.
Also muß gelten:

$$\frac{x}{25\ 000} + \frac{y}{15\ 000} = 1. \qquad (1)$$

Analog erhält man für den Reifen, der x Kilometer als Hinterradreifen und y Kilometer als Vorderradreifen läuft:

$$\frac{x}{15\ 000} + \frac{y}{25\ 000} = 1. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) erhält man durch Multiplikation mit $3 \cdot 75\ 000$ bzw. mit $5 \cdot 75\ 000$

$$9x + 15y = 3 \cdot 75\ 000,$$
$$25x + 15y = 5 \cdot 75\ 000.$$

Daraus folgt

$$16x = 2 \cdot 75\ 000,$$
$$x = 75\ 000 : 8 = 9375$$

sowie $5y = 75\ 000 - 3x = (8 - 3) \cdot 9375,$

$$y = 9375.$$

Damit sind $x = 9375$ und $x+y = 18\ 750$ als in a) bzw. b) gesuchte Kilometerzahlen ermittelt.

2. Lösungsweg, Variante 2:

Der 2. Lösungsweg vereinfacht sich durch folgende Überlegung:
Werden die Reifen nach x Kilometern getauscht, so ergibt sich

genau dann am Ende eine gleichstarke Abnutzung beider Reifen, wenn auch nach dem Tauschen nochmals x Kilometer gefahren werden. Analog wie in Variante 1 folgt damit

$$\frac{x}{25\,000} + \frac{x}{15\,000} = 1,$$

$$\frac{8x}{75\,000} = 1,$$

$$x = 75\,000 : 8 = 9375,$$

also sind x = 9375 und 2x = 18 750 die gesuchten Kilometerzahlen.

240833) Lösung: 7 Punkte

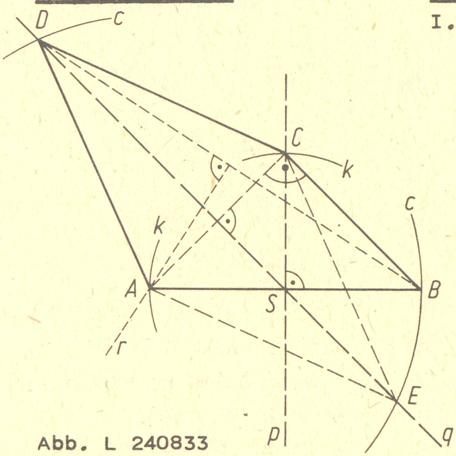

Abb. L 240833

I. Wenn ein Viereck ABCD die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:

Nach (V) und (II) ist S derjenige Punkt der Strecke AB, der auf der Mittelsenkrechten p von AB liegt, also der Mittelpunkt von AB.

Ferner liegt S nach (V) und (III) auf der Mittelsenkrechten von AC, also gilt

$$\overline{CS} = \overline{AS}.$$

Außerdem liegt C nach (II) auf der Mittelsenkrechten p von AB.

Nach (IV) und (I) gilt $\overline{AD} = \overline{AB} = a$; außerdem liegt D nach (III) auf der Mittelsenkrechten q von AC. Ferner liegt D so, daß die Strecke CD die Strecke AB nicht schneidet.

Daher kann ein Viereck ABCD nur dann die geforderten Eigenschaften haben, wenn es folgendermaßen konstruiert werden kann:

II. (1) Man konstruiert eine Strecke AB der Länge a.

(2) Man konstruiert den Mittelpunkt S und die Mittelsenkrechte p der Strecke AB.

(3) Man konstruiert den Kreis k um S mit $\overline{AS}$ und bezeichnet einen Schnittpunkt von p und k mit C.

(4) Man konstruiert die Mittelsenkrechte q von AC.

(5) Man konstruiert den Kreis c um A mit $\overline{AB}$. Die Konstruktion ergibt: Für [genau] einen der Schnittpunkte von q und c schneidet seine Verbindungsstrecke mit C die Strecke AB nicht[1]; diesen Schnittpunkt bezeichnet man mit D.

III. Beweis, daß jedes Viereck ABCD, das nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die geforderten Eigenschaften hat:

Nach (1) gilt $\overline{AB} = a$.

Nach (2) und (3) liegt C auf der Mittelsenkrechten p von AB.

Nach (4) und (5) liegt D auf der Mittelsenkrechten q von AC.

Nach (5) gilt $\overline{AD} = \overline{AB}$, also liegt A auf der Mittelsenkrechten von BD.

Da S nach (2) der Mittelpunkt von AB ist, liegt S auf der Mittelsenkrechten p von AB. Da nach (2) und (3) ferner $\overline{CS} = \overline{AS}$ ist, liegt S auch auf der Mittelsenkrechten q von AC. Also schneiden sich p und q in dem auf AB liegenden Punkt S.

Ferner ergibt die Konstruktion: Für den in (5) konstruierten und ausgewählten Punkt D, für den sich AB und CD nicht schneiden, schneiden sich auch BC und AD nicht[2]. Daher ist ABCD ein nicht überschlagenes Viereck.

---

1 Beweis: Werden die Schnittpunkte von q und c so mit D und E bezeichnet, daß E auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegt wie B, dagegen D nicht, so schneiden sich CD und AB nicht; [ferner gilt dann: Wegen $\overline{AE} = \overline{CE} = a > \frac{a}{2} = \overline{AS} = \overline{CS}$ ist $\overline{\sphericalangle CAE} > \overline{\sphericalangle CAS}$, also liegen E und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und B; somit schneidet die Strecke CE diese Gerade. Wegen $\overline{\sphericalangle CAE} = \overline{\sphericalangle ACE}$, also $\overline{\sphericalangle ACE} < 90^\circ$, und $C \in p$ mit $\overline{AS} = \overline{CS} = \overline{BS}$, also $\overline{\sphericalangle ACS} = 90^\circ$, liegt der Schnittpunkt zwischen A und B.] Da kein Eindeutigkeitsnachweis verlangt ist, können die Angaben in eckigen Klammern wegbleiben, und oben im Text kann "einen solchen Schnittpunkt" statt "diesen Schnittpunkt" folgen. $\sphericalangle ACB = 90^\circ$

2 Beweis: Da D nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegt wie B, schneiden sich auch AD und BC nicht.

Diese Beweise werden nicht vom Schüler verlangt; es werde als ausreichend gewertet, die genannten Sachverhalte der ausgeführten Konstruktion zu entnehmen.

L 8;II

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

240834) Lösung: **7 Punkte**

Es sei o.B.d.A. $\overline{BC} \leqq \overline{AC}$, also $\alpha = \overline{\sphericalangle BAC} \leqq \overline{\sphericalangle ABC} = 90^\circ - \alpha$ (Winkelsumme im Dreieck ABC) und daher $\alpha \leqq 45^\circ$. Dann ist $\overline{\sphericalangle BCH} = 90^\circ - \overline{\sphericalangle ABC}$ (Winkelsumme im Dreieck BCH), also $\overline{\sphericalangle BCH} = \alpha$.

Ferner liegt C nach der Umkehrung des Thalessatzes auf dem Kreis mit AB als Durchmesser. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist S; daher gilt $\overline{AS} = \overline{CS}$ und folglich $\overline{\sphericalangle ACS} = \overline{\sphericalangle CAS} = \alpha$ (Basiswinkel im Dreieck ACS). Weiterhin ist $\overline{\sphericalangle ACW} = \overline{\sphericalangle BCW} = 45^\circ$, da CW Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ ist.

Aus den somit gezeigten Beziehungen

$$\overline{\sphericalangle ACS} = \alpha \leqq 45^\circ = \overline{\sphericalangle ACW} \text{ und } \overline{\sphericalangle BCH} = \alpha \leqq 45^\circ = \overline{\sphericalangle BCW}$$

folgt

$$\overline{\sphericalangle SCW} = 45^\circ - \alpha = \overline{\sphericalangle HCW}, \text{ w.z.b.w.}$$

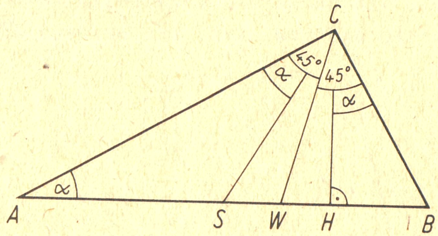

Abb. L 240834

Hinweis zur Korrektur: Die Aussagen $\overline{\sphericalangle ACS} \leqq \overline{\sphericalangle ACW}$ und $\overline{\sphericalangle BCH} \leqq \overline{\sphericalangle BCW}$ (bzw. die Aussage, daß W auf der Strecke SH liegt) sind zu einem vollständigen Beweis erforderlich, bei dem aus den Gleichungen $\overline{\sphericalangle ACW} = \overline{\sphericalangle BCW}$ und $\overline{\sphericalangle ACS} = \overline{\sphericalangle BCH}$ durch Subtraktion (z. B. wie im obigen Lösungstext formuliert) auf $\overline{\sphericalangle SCW} = \overline{\sphericalangle HCW}$ geschlossen werden soll.

Die Einbeziehung des Falles $\overline{BC} = \overline{AC}$ ist, wie oben ausgeführt, zulässig. Werden jedoch in einem Beweisweg etwa die Dreiecke CSW und CHW verwendet, so ist der genannte Fall als Fall ihrer Entartung (S = W = H) gesondert zu berücksichtigen.

240835) Lösung: 7 Punkte

Nach Voraussetzung gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$ und $\overline{AC} + \overline{BC} + \overline{AB} = 13$ cm sowie $\overline{AB} = 3$ cm. Hieraus folgt $2\cdot\overline{AC} + 3$ cm $= 13$ cm, also

$$\overline{AC} = 5\text{cm}.$$

Wegen $\overline{AC} = \overline{BC}$ gilt $\overline{\sphericalangle CAB} = \overline{\sphericalangle CBA}$. Da nach Voraussetzung $DE \parallel AB$ gilt (und D auf AC sowie E auf BC liegt), ist ABED ein gleichschenkliges Trapez. Hieraus folgt: Ist $\overline{AD} = x$ cm die gesuchte Länge, so ist auch

$$\overline{BE} = \overline{AD} = x\text{ cm},$$

und es gilt $\overline{CD} = (5 - x)$ cm.

Wegen $DE \parallel AB$ folgt nach dem Strahlensatz $\overline{DE} : \overline{AB} = \overline{CD} : \overline{CA}$. Hieraus erhält man

$$\overline{DE} = \frac{3\cdot(5 - x)}{5}\text{ cm} = (3 - \tfrac{3}{5}x)\text{ cm}.$$

Nach Voraussetzung gilt ferner $\overline{AB} + \overline{BE} + \overline{DE} + \overline{AD} = 7{,}4$ cm, also

$$3 + x + (3 - \tfrac{3}{5}x) + x = 7{,}4,$$
$$\tfrac{7}{5}x = 1{,}4,$$
$$x = 1.$$

Damit ist gezeigt, daß durch die Voraussetzungen die Länge der Strecke AD eindeutig bestimmt ist; sie beträgt $\overline{AD} = 1$ cm.

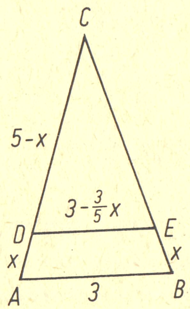

Abb. L 240835

240836) Lösung: 7 Punkte

Bezeichnet man die Rastzeit von A mit a und die von B mit b, so ist bei A die (reine) Fahrzeit 2b und bei B entsprechend 3a. Da die Summen von Fahrzeit und Rastzeit für jeden der beiden Fahrer gleich sind, gilt

$$a + 2b = b + 3a,$$

also $$b = 2a > a.$$

Der Fahrer B hatte mithin die längere Rastzeit.