XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

240821

Klaus berichtet über alle Tage seines Aufenthaltes im Ferienlager:

(1) An jedem Vormittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.

(2) An jedem Nachmittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.

(3) An genau sieben Tagen kam regnerisches Wetter vor.

(4) Wenn es nachmittags regnete, war es vormittags sonnig.

(5) An genau fünf Nachmittagen war es sonnig.

(6) An genau sechs Vormittagen war es sonnig.

Stelle fest, ob sich aus diesen Angaben die Anzahl der Tage, die Klaus im Ferienlager war, eindeutig ermitteln läßt! Ist dies der Fall, so gib diese Anzahl an! Gib ferner eine (nach den Angaben) mögliche Verteilung sonniger und regnerischer Vor- und Nachmittage an!

240822

Es sei ABC ein Dreieck; die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ betrage 30°. Beweise, daß unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich dem Umkreisradius r des Dreiecks ABC ist!

240823

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\frac{11}{15} < \frac{7}{x} < \frac{15}{11}$$

erfüllen!

240824

Eine Blechtafel hat die in Abbildung A 240824 ersichtliche Gestalt, wobei a, b und x gegebene Längen sind. Die Tafel soll längs der gestrichelten Linie in zwei Teile zerlegt werden, und aus jedem Teil soll dann ein oben offener quaderförmiger Kasten der Höhe x hergestellt werden.

1. Berechne das Volumen eines solchen Kastens, wenn a = 360 mm, b = 120 mm, x = 25 mm gegeben sind!
2. Ermittle das Volumen eines solchen Kastens, dargestellt in Abhängigkeit von Variablen a, b und x, die (wegen ihrer Bedeutung als Längen) nur positive Werte annehmen können!
3. Es seien beliebige positive Werte a und b fest vorgegeben. Ermittle in Abhängigkeit von diesen a, b alle diejenigen Werte für die Variable x, mit denen es möglich wird, Kästen der genannten Art herzustellen!

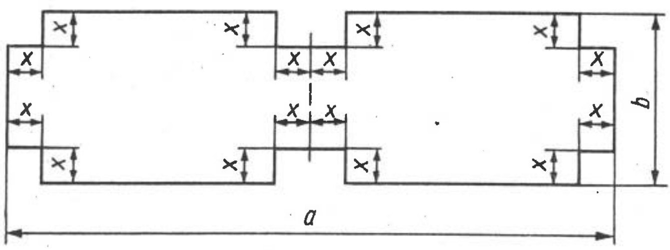

Abb. A 240824

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

240821) Lösung: **10 Punkte**

Es sei x die Anzahl der Tage, an denen es vormittags und nachmittags sonnig war,
y die Anzahl der Tage, an denen es vormittags sonnig und nachmittags regnerisch war,
z die Anzahl der Tage, an denen es vormittags regnerisch und nachmittags sonnig war.

Da es nach (4) keinen Tag gab, an dem es vormittags und nachmittags regnerisch war, folgt aus (1) und (2), daß jeder Tag genau eine der drei bei x, y und z genannten Wetterverteilungen aufwies. Die gesuchte Anzahl der Tage, die Klaus im Ferienlager war, ist somit $x + y + z$. Aus (3), (5) bzw. (6) folgt

$$y + z = 7,$$
$$x + z = 5$$
bzw.
$$x + y = 6.$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so ergibt sich $2\cdot(x+y+z) = 18$, also $x+y+z = 9$. Die gesuchte Anzahl läßt sich also eindeutig ermitteln; sie beträgt 9.

Weiter folgt $x = 9-7 = 2$, $y = 9-5 = 4$, $z = 9-6 = 3$ und damit für die Wetterverteilung:

An genau 2 Tagen war es vormittags und nachmittags sonnig,
an genau 4 Tagen war es vormittags sonnig und nachmittags regnerisch,
an genau 3 Tagen war es vormittags regnerisch und nachmittags sonnig.

Wie eine Oberprüfung der Angaben (1) bis (6) zeigt, gelangt man mit diesen Anzahlen zu einer (nach den Angaben) möglichen Wetterverteilung, z. B.[1] in der folgenden Tabelle:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vormittag	s	s	s	s	s	s	r	r	r
Nachmittag	s	s	r	r	r	r	s	s	s

240822) Lösung: 8 Punkte

Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC sei M, der Umkreisradius sei r. Im Umkreis ist $\sphericalangle BAC$ Peripheriewinkel über der Sehne BC und $\sphericalangle BMC$ der zugehörige Zentriwinkel. Daher hat $\sphericalangle BMC$ nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz die Größe $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$; nach dem Innenwinkelsatz, angewandt auf $\triangle BCM$, gilt also

$$\overline{\sphericalangle BMC} + \overline{\sphericalangle MCB} = 120^\circ. \qquad (1)$$

Ferner ist wegen $\overline{CM} = \overline{BM} = r$ das Dreieck BCM gleichschenklig mit

$$\overline{\sphericalangle MBC} = \overline{\sphericalangle MCB}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $\overline{\sphericalangle MBC} = \overline{\sphericalangle MCB} = 60^\circ$, also ist $\triangle BCM$ sogar gleichseitig, womit $\overline{BC} = r$ bewiesen ist.

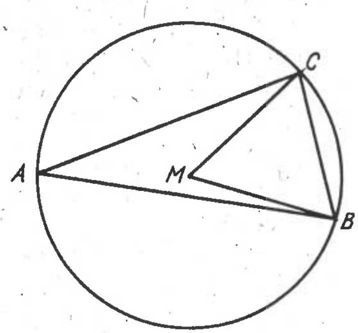

Abb. L 240822

240823) Lösung: 10 Punkte

Die geforderte Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn die zwei Ungleichungen

$$\frac{11}{15} < \frac{7}{x} \qquad (1)$$

1 Eine in dieser Weise detaillierte Aufzählung der Tage wird nicht vom Schüler verlangt.

und $\frac{7}{x} < \frac{15}{11}$ (2)

erfüllt sind.

Für natürliche Zahlen x gilt (1) genau dann, wenn ($\frac{7}{x}$, d. h. auch) x positiv ist und die Ungleichung $11x < 105$ erfüllt. Dies gilt genau dann, wenn $0 < x < \frac{105}{11}$ ist, was wegen $\frac{105}{11} = 9\,\frac{6}{11}$ genau von den natürlichen Zahlen x mit $0 < x \leqq 9$ erfüllt wird.

Für natürliche Zahlen x gilt (2) genau dann, wenn ($\frac{7}{x}$ existiert, d. h.) $x > 0$ ist und die Ungleichung $15x > 77$ erfüllt. Dies gilt genau dann, wenn $x > \frac{77}{15}$ ist, was wegen $\frac{77}{15} = 5\,\frac{2}{15}$ genau von den natürlichen Zahlen x mit $x \geqq 6$ erfüllt wird.

Also ist die Gültigkeit von (1) und (2) für natürliche Zahlen x gleichbedeutend mit $6 \leqq x \leqq 9$ (d. h., die gesuchten Zahlen sind genau die Zahlen 6, 7, 8 und 9).

Kürzere Fassung des 1. Lösungsweges:

Die geforderte Ungleichung ist nur für positive Zahlen möglich, und für diese ist sie äquivalent mit $\frac{15}{11} > \frac{x}{7} > \frac{11}{15}$, dies mit $\frac{105}{11} > x > \frac{77}{15}$, und dies wird wegen $\frac{105}{11} = 9\,\frac{6}{11}$, $\frac{77}{15} = 5\,\frac{2}{15}$ genau von den natürlichen Zahlen x = 6, 7, 8, 9 erfüllt.

2. Lösungsweg:

Es gilt auf zwei Dezimalen genau

$$\frac{11}{15} = 0{,}73; \qquad \frac{15}{11} = 1{,}36.$$

Ferner findet man bei Berechnung von Werten $\frac{7}{x}$ auf zwei Dezimalen genau (unter anderen) die Werte

$$\frac{7}{10} = 0{,}70; \qquad \frac{7}{9} = 0{,}78; \qquad \frac{7}{6} = 1{,}17; \qquad \frac{7}{5} = 1{,}40.$$

Daraus folgt

$$\ldots < \frac{7}{11} < \frac{7}{10} < \frac{11}{15} < \frac{7}{9} < \ldots\ldots < \frac{7}{6} < \frac{15}{11} < \frac{7}{5} < \ldots < \frac{7}{1}.$$

Also gilt die geforderte Ungleichung unter allen natürlichen Zahlen x genau für x = 6, 7, 8, 9.

Hinweise zur Korrektur:

1. Wurden (im 1. Lösungsweg) anstelle von Äquivalenzaussagen nur in einer Richtung führende Schlüsse gezogen ("aus (1) folgt $11x < 105$, $x < 9\,\frac{6}{11}$ ..." usw.), so ist anschließend ein Nachweis der umgekehrten Schlußmöglichkeit erforderlich, z. B. als Probe ("für alle x = 6,7,8,9 gilt ...., also (1) und (2)").

2. Ein Herleiten von Ungleichungen aus Dezimalbruchberechnungen muß mindestens durch Genauigkeitsangaben (etwa wie im 2. Lösungsweg) stichhaltig gemacht werden.
(Ein damit gegebener Beweis könnte ausführlicher nämlich z. B. für $\frac{11}{15} < \frac{7}{9}$ so lauten: Daß die Angaben $\frac{11}{15} = 0{,}73$, $\frac{7}{9} = 0{,}78$ auf zwei Dezimalen genau sind, besagt $0{,}725 < \frac{11}{15} <$ $< 0{,}735$ bzw. $0{,}775 \leqq \frac{7}{9} \leqq 0{,}785$. Aus diesen beiden Ungleichungen und $0{,}735 < 0{,}775$ folgt somit die Ungleichung $\frac{11}{15} < \frac{7}{9}$.
Vom Schüler wird eine so ausführliche Wiedergabe nicht verlangt.)

<u>240824) Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

1. Jeder der beiden Teile hat eine Gestalt, die aus einem Rechteck der Seitenlängen $\frac{a}{2} = 180$ mm, $b = 120$ mm entsteht, indem an allen vier Ecken Quadrate der Seitenlänge $x = 25$ mm herausgeschnitten sind. Ein daraus hergestellter oben offener quaderförmiger Kasten der Höhe $x = 25$ mm hat als Grundfläche ein Rechteck der Seitenlängen $\frac{a}{2} - 2x = 130$ mm, $b - 2x = 70$ mm. Daher ist sein Volumen
$$V = 130 \text{ mm} \cdot 70 \text{ mm} \cdot 25 \text{ mm} = 227500 \text{ mm}^3.$$
2. Mit gleicher Begründung wie in 1. ergibt sich
$$V = \left(\frac{a}{2} - 2x\right) \cdot (b - 2x) \cdot x.$$
3. Als Längenangabe muß x positiv sein. Ferner wird ein Herstellen der genannten Kästen genau dann möglich, wenn auch $\frac{a}{2} - 2x$ und $b - 2x$ als Längenangaben (nämlich für Kantenlängen eines Kastens) positiv sind, d. h. genau dann, wenn außer der Ungleichung
$$x > 0$$
auch die Ungleichungen
$$\frac{a}{2} - 2x > 0 \text{ und } b - 2x > 0$$
gelten. Diese sind äquivalent mit
$$2x < \frac{a}{2} \qquad \text{und } 2x < b$$
und diese mit
$$x < \frac{a}{4} \qquad \text{und } x < \frac{b}{2}.$$
Die gesuchten Werte sind also alle diejenigen positiven Werte x, die kleiner sind als die kleinere der beiden Längenangaben $\frac{a}{4}$, $\frac{b}{2}$.

Empfehlung fur die Punktverteilung

OKL 8	Gesamtpunktzahl: 40
<u>240821</u>	10 Punkte
Angabe der richtigen Anzahl	3 Punkte
Vollständige Herleitung	6 Punkte
Beispiel für Verteilung	1 Punkt
<u>240822</u>	8 Punkte
$\overline{\sphericalangle BMC} = 60^\circ$ mit Begründung	2 Punkte
$\overline{\sphericalangle MBC} + \overline{\sphericalangle MCB} = 120^\circ$ mit Begründung	2 Punkte
$\overline{\sphericalangle MBC} = \overline{\sphericalangle MCB}$ mit Begründung	2 Punkte
Gleichseitigkeit mit Begründung	2 Punkte
Bei anderen Lösungen:	
Angabe aller nötigen Feststellungen	4 Punkte
Angabe aller zugehöriger Begründungen	4 Punkte
<u>240823</u>	10 Punkte
richtiges Ergebnis	3 Punkte
vollständige Herleitung	7 Punkte
<u>240824</u>	12 Punkte
Teil 1	3 Punkte
Teil 2	3 Punkte
Teil 3	6 Punkte