Kunlauft

A 7

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 7

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

240721

Drei Ehepaare sitzen zum Rommésspiel im Kreis um einen Tisch. Die Vornamen der Männer sind Anton, Bernd und Christian, die Vornamen der Frauen sind Ulrike, Vera und Waltraud. Ferner ist bekannt:

(1) Keiner der sechs Teilnehmer sitzt seinem Ehepartner gegenüber.
(2) Vera sitzt zwischen zwei Männern.
(3) Anton sitzt neben seiner Frau.
(4) Rechts von Ulrikes Mann sitzt Waltraud, links von ihm sitzt Christian.

Beweise, daß man aus diesen Angaben sowohl von jedem Teilnehmer den Ehepartner als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

240722

Ein Garten von rechteckiger Gestalt ist genau 13 m länger als breit. Um ihn vollständig zu umzäunen, benötigt man genau 92 m Zaun.

a) Berechne den Flächeninhalt des Gartens!
b) Der Garten soll vollständig in Beete und Wege aufgeteilt werden, wobei folgende Bedingungen zu erfüllen sind:
   Jedes Beet hat die Gestalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3 m und 1 m.
   Zwischen je zwei benachbarten Beeten und zwischen dem Zaun und den Beeten ist überall ein 25 cm breiter Weg angelegt.

A 7

Untersuche, ob es eine Aufteilung des Gartens gibt, bei der diese Bedingungen erfüllt sind! Wenn das der Fall ist, so ermittle für eine solche Aufteilung die Anzahl der Beete!

240723

Von einem Parallelogramm ABCD wird vorausgesetzt, daß der Schnittpunkt E der beiden Winkelhalbierenden von ∢ BAD und ∢ CBA auf der Seite CD liegt.

Beweise, daß unter dieser Voraussetzung E stets der Mittelpunkt der Seite CD ist!

240724

Aus einem quadratischen Stück Blech der Seitenlänge a soll ein oben offener würfelförmiger Kasten hergestellt werden. Für das Netz zum Herstellen eines solchen Kastens werden die beiden Varianten in Abbildung A 240724 zur Diskussion gestellt. Beide Netze sind so angeordnet, daß die Diagonalen des gegebenen Quadrates jeweils Symmetrieachsen des Netzes sind.

Ermittle in Abhängigkeit von a die Größe des Abfalls (in Abb. A 240724 schraffiert) bei beiden Varianten! Wenn bei einer Variante ein kleinerer Abfall entsteht, so gib diese Variante an!

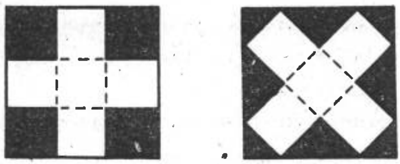

Abb. A 240724

Umlauft

L 7

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

240721) Lösung: 9 Punkte

Nach (4) ist Ulrikes Mann nicht Christian. Aus (4) folgt auch, daß Ulrikes Mann nicht neben seiner Frau sitzt; er ist wegen (3) also auch nicht Anton. Daher gilt:

Ulrikes Mann ist Bernd, (*)

und man erhält Abbildung L 240721 a. Hiernach kann Ulrike wegen (1) nur entweder links von Christian oder rechts von Waltraud sitzen. Säße sie links von Christian (Abb. L 240721 b), so blieben für Vera nur solche Plätze übrig, die jeweils einer Frau benachbart wären, im Widerspruch gegen (2). Also sitzt Ulrike rechts von Waltraud (Abb. L 240721 c). Nach (2) müssen dann die Plätze von Anton und Vera so angeordnet sein, wie in Abbildung L 240721 d angegeben.

Wegen (*) ist Antons Frau nicht Ulrike; daher folgt aus Abbildung L 240721 d und (3):

Antons Frau ist Vera, (**)

und es verbleibt als drittes Ehepaar:

Christians Frau ist Waltraud. (***)

Damit ist bewiesen, daß man die Ehepartner und die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann. Sie lauten wie in (*), (**), (***) bzw. Abbildung L 240721 d angegeben.

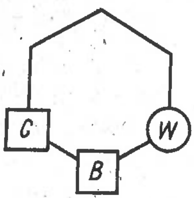

Abb. L 240721 a

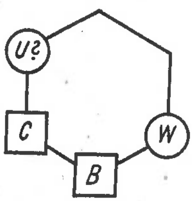

Abb. L 240721 b

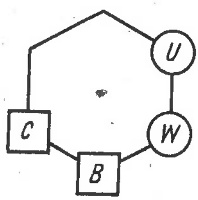

Abb. L 240721 c

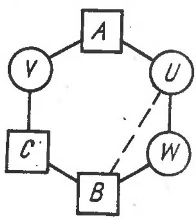

Abb. L 240721 d

240722) Lösung: 12 Punkte

a) Sind a und b die in Metern angegebene Länge bzw. Breite des Gartens, so gilt

$$a = 13 + b \qquad (1)$$

sowie, weil der halbe Umfang 92 m : 2 = 46 m beträgt,

$$a + b = 46. \qquad (2)$$

Setzt man a aus (1) in (2) ein, so folgt $13+2b = 46$, $2b = 33$,

$$b = 16{,}5$$

und damit aus (1) $a = 29{,}5$.

Der Flächeninhalt des Gartens beträgt folglich

$16{,}5\ \text{m} \cdot 29{,}5\ \text{m} = 486{,}75\ \text{m}^2$.

b) Legt man zunächst längs zweier benachbarter Seiten des Gartens einen Weg von 25 cm Breite an (in Abbildung L 240722 a schraffiert), so verbleibt ein Rechteck von 29,25 m Länge und 16,25 m Breite. Wenn man dieses Rechteck in Teilrechtecke mit den Seitenlängen 3,25 m und 1,25 m aufteilen kann (Abb. L 240722 b), so erhält man eine Anordnung von Beeten, die den geforderten Bedingungen genügt. Eine Möglichkeit hierzu zeigt Abbildung L 240722 a, wie sich wegen 29,25 : 3,25 = 9 und 16,25 : 1,25 = 13 bestätigen läßt.

Bei dieser Aufteilung ist die Anzahl der Beete $9 \cdot 13 = 117$.

Andere Lösungsmöglichkeiten:

Zu a): Die Ermittlung von a und b kann auch in mehr anschaulicher Weise formuliert werden: Schneidet man von dem Garten ABCD ein Quadrat AEFD ab, dessen Seitenlänge gleich der Breite b des Gartens ist, so verbleibt ein Rechteck EBCF von gleicher Breite b, dessen Länge 13 m beträgt (vgl. Abb. L 240722 c). Die 92 m Zaun teilen sich damit auf in zwei Strecken EB, FC der Länge 13 m und vier Strecken AE, DF, AD, BC der Länge b. Wegen $92 - 2 \cdot 13 = 66$ und $66 : 4 = 16{,}5$ folgt damit $b = 16{,}5$ m, also $a = \overline{AE} + \overline{EB} = b + 13\ \text{m} = 29{,}5$ m.

Zu b): Eine andere mögliche Anordnung von Beeten zeigt Abbildung L 240722 c. Weitere Anordnungen entstehen durch häufigeren Wechsel zwischen 1,25 m breiten und 3,25 m breiten "Streifen" parallel zur 16,5 m langen Gartenseite. Bei allen Anordnungen ergibt sich dieselbe Anzahl 117 der Beete. (Diese Angaben werden nicht vom Schüler verlangt.)

L 7

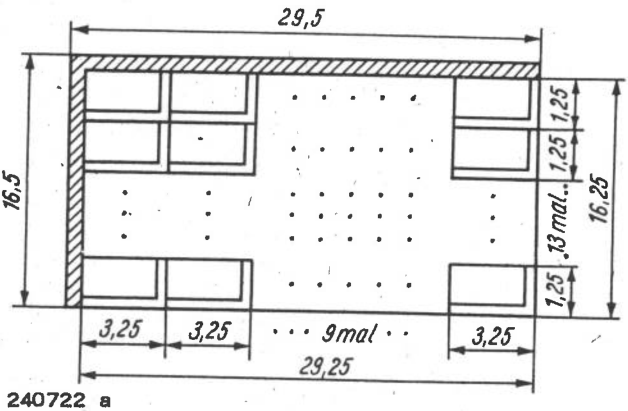

Abb. L 240722 a
(nicht maßstabgetreu)

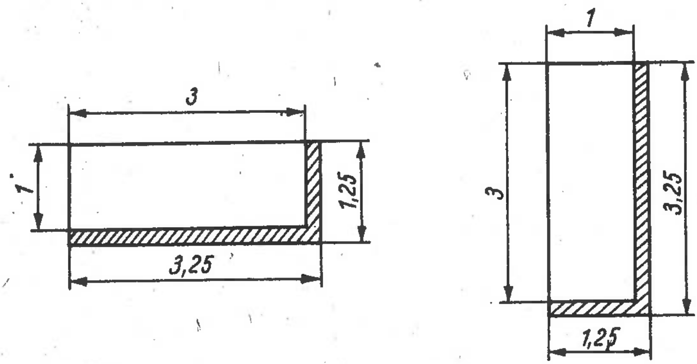

Abb. L 240722 b

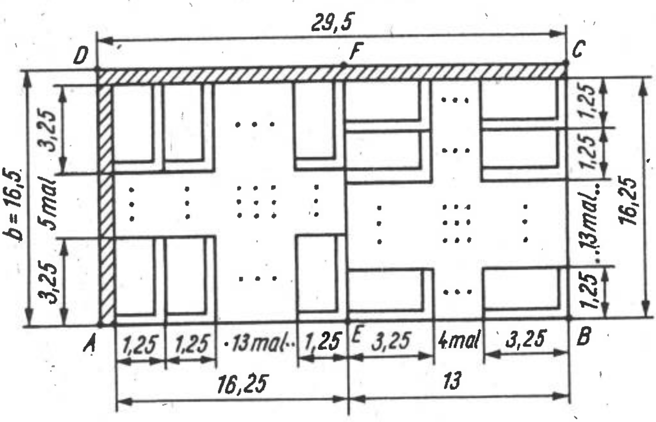

Abb. L 240722 c

240723) Lösung: 10 Punkte

Da im Parallelogramm ABCD die gegenüberliegenden Seiten AB und CD zueinander parallel sind und da E auf CD liegt, gilt nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen

$$\overline{\sphericalangle BAE} = \overline{\sphericalangle DEA}.$$

Da AE nach Voraussetzung den Winkel $\sphericalangle BAD$ halbiert, gilt

$$\overline{\sphericalangle BAE} = \overline{\sphericalangle EAD}.$$

Daher folgt $\overline{\sphericalangle DEA} = \overline{\sphericalangle EAD}$.

Nach der Umkehrung des Satzes über die Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken folgt hieraus

$$\overline{AD} = \overline{ED}.$$

Analog erhält man

$$\overline{BC} = \overline{EC}.$$

Da nach Voraussetzung AD und BC gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms sind, gilt

$$\overline{AD} = \overline{BC}.$$

Also ist

$$\overline{ED} = \overline{EC}.$$

Da E nach Voraussetzung auch auf der Seite CD liegt, ist damit E als Mittelpunkt von CD nachgewiesen.

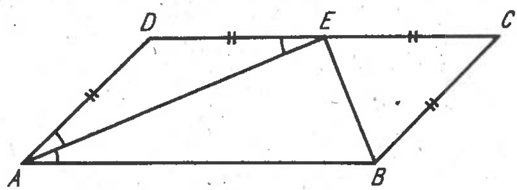

Abb. L 240723

240724) Lösung: 9 Punkte

Variante 1:

Die Quadratfläche kann in genau 9 kongruente Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{a}{3}$ aufgeteilt werden (Abb. L 240724 a); davon sind 4 Quadrate Abfall, die restlichen 5 bilden das Netz zum Herstellen des Kastens.

Folglich beträgt hier der Abfall $\frac{4}{9}a^2$.

L 7

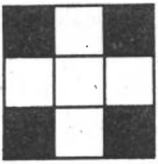

Abb. L 240724 a

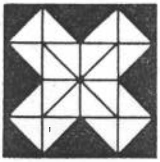

Abb. L 240724 b

Variante 2:
Die Quadratfläche kann in genau 32 kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit der Schenkellänge $\frac{a}{4}$ aufgeteilt werden (z. B. wie in Abb. L 240724 b); davon sind 12 Dreiecke Abfall, die restlichen 20 bilden das Netz zum Herstellen des Kastens.
Wegen $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ beträgt demnach hier der Abfall $\frac{3}{8}\, a^2$.

Vergleich: Wegen $4 \cdot 8 > 3 \cdot 9$ gilt $\frac{4}{9} > \frac{3}{8}$. Folglich ist der Abfall bei Variante 2 kleiner als bei Variante 1.
(Oder: Das Netz beträgt $\frac{5}{9}\, a^2$ bei Variante 1, $\frac{5}{8}\, a^2$ bei Variante 2, ist also wegen $\frac{5}{8} > \frac{5}{9}$ bei Variante 2 größer. Daher führt Variante 2 zu kleinerem Abfall als Variante 1.)

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 7	Gesamtpunktzahl: 40
240721	9 Punkte
Angabe der richtigen Sitzordnung	4 Punkte
vollständige Begründung	5 Punkte
240722	12 Punkte
a) richtiges Ergebnis	3 Punkte
vollständige Herleitung	3 Punkte
b) Angabe der richtigen Anzahl	3 Punkte
vollständige Begründung	3 Punkte
240723	10 Punkte
$\overline{\sphericalangle BAE} = \overline{\sphericalangle DEA}$ mit Begründung	2 Punkte
$\overline{\sphericalangle DEA} = \overline{\sphericalangle EAD}$ mit Begründung	2 Punkte
$\overline{AD} = \overline{ED}$ und $\overline{BC} = \overline{EC}$ mit Begründung	3 Punkte
$\overline{ED} = \overline{EC}$ mit Begründung	2 Punkte
Ableitung der Behauptung	1 Punkt
Bei anderen Lösungen:	
Angabe aller nötigen Feststellungen	5 Punkte
Angabe aller zugehörigen Begründungen	5 Punkte
240724	9 Punkte
Variante 1:	
richtiges Ergebnis	2 Punkte
vollständige Herleitung	2 Punkte
Variante 2:	
richtiges Ergebnis	2 Punkte
vollständige Herleitung	2 Punkte
Vergleich	1 Punkt