240613) Lösung:

Sichtbar sind von jedem der drei Würfel erstens die vier Seitenflächen (der Mantel). Sie haben die Flächeninhalte

$A_1 = 4 \cdot a_1^2 = 1600\ cm^2$, $A_2 = 4 \cdot a_2^2 = 400\ cm^2$, $A_3 = 4 \cdot a_3^2 = 64\ cm^2$.

Sichtbare Flächenteile sind zweitens Teile der Deckflächen der drei Würfel. Die Flächeninhalte dieser Flächenteile ergeben zusammen den Flächeninhalt der Deckfläche des größten Würfels[1], also

$A_D = a_1^2 = 400\ cm^2$.

Weitere sichtbare Flächenteile kommen nicht vor[1]. Für die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile gilt daher

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_D = 2464\ cm^2$.

---

1 Es wird akzeptiert, diese Feststellungen der Anschauung zu entnehmen.

240614) Lösung:

(a) Wegen 111111111 : 9 = 12345679 ist

z = 12345679

die Zahl, die mit 9 multipliziert 111111111 ergibt.

(b) Aus

12345679 · 9 = 111111111

folgt

12345679 · 72 = 888888888. (1)

Daher hat beispielsweise die Zahl x = 72 die verlangte Eigenschaft, daß die Zahl z · x mit lauter Ziffern 8 geschrieben wird.

(c) Aus (1) folgt[1]

12345679 · 72 · 1000000001 = 888888888 · 1000000001,

d.h.

12345679 · 72000000072 = 888888888888888888. (2)

Also hat (beispielsweise) auch die Zahl 72000000072 die verlangte Eigenschaft.

---

1 Man kann auch (2) durch unmittelbares Ausrechnen gewinnen, ohne (1) heranzuziehen (ähnlich auch (1) ohne Zurückführung auf (a)).

Olympiadeklasse 7

240711) Lösung:

Außer dem einen Jungen, der nach (7) alle drei Arbeitsgemeinschaften besucht, gibt es nach (4), (5) bzw. (6) (und wegen 3-1 = 2, 1-1 = 0 bzw. 3-1 = 2)

genau 2 Jungen, die genau zu den AG "Foto" und "Junge Mathematiker" gehören,

keinen Jungen, der genau zu den AG "Foto" und "Turnen" gehört,

genau 2 Jungen, die genau zu den AG "Junge Mathematiker" und "Turnen" gehören.

Hiernach und nach (1), (2) bzw. (3) (sowie wegen 6-2-0-1 = 3, 5-2-2-1 = 0 bzw. 5-0-2-1 = 2) gibt es

genau 3 Jungen, die genau zur AG "Foto" gehören,

keinen Jungen, der genau zur AG "Junge Mathematiker" gehört,

genau 2 Jungen, die genau zur AG "Turnen" gehören.

Mit dieser Aufzählung sind alle Möglichkeiten erfaßt, mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften anzugehören, und zwar jede solche Möglichkeit genau einmal. Daher ist

1 + 2 + 0 + 2 + 3 + 0 + 2 = 10

die gesuchte Anzahl aller Jungen dieser Klasse.

Hinweise zur Korrektur:

Die Lösungsschritte können auch mit Hilfe von Gleichungen für Variable (etwa F, M, T, FM, FT, MT, FMT als Anzahlen derjenigen Jungen, die genau in den AG mit den jeweils vorkommenden Anfangsbuchstaben sind, wobei z.B. (1) als F + FM + FT + FMT = 6 erscheint) oder auch unter Verwendung eines Mengendiagramms wie in Abbildung L 240711 formuliert sein. Erforderlich ist es bei jeder derartigen Darstellungsvariante des obigen Lösungsweges, daß die (vollständige und disjunkte) Zerlegung in die Mengen mit den Anzahlen F,M,...,FMT sowie die rechnerischen Teilschritte zur Ermittlung dieser Anzahlen ersichtlich sind.

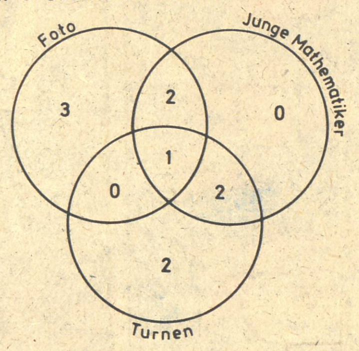

Abb. L 240711

240712) Lösung:

(1) Die kleinste Summe der Augenzahlen wird mit dem Wurf (1,1,1) erreicht und beträgt somit 3; die größte Summe tritt beim Wurf (6,6,6) auf und beträgt somit 18.

(2) Es gibt genau die folgenden sechs verschiedenen Würfe, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt:

(6,5,1), (5,5,2), (4,4,4),
(6,4,2), (5,4,3);
(6,3,3,);

(3) Es gibt genau die folgenden verschiedenen Würfe, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist:

(6,6,6),
(6,6,5), (6,5,5)
(6,6,4), (6,5,4), (6,4,4),
(6,6,3), (6,5,3), (6,4,3), (6,3,3),
(6,6,2), (6,5,2), (6,4,2), (6,3,2), (6,2,2),
(6,6,1); (6,5,1); (6,4,1); (6,3,1); (6,2,1); (6,1,1).

Ihre Anzahl beträgt

6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21.

(4) In entsprechender Weise gibt es genau die folgenden

5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15

verschiedenen Würfe mit 5 als höchster Augenzahl

(5,5,5),
(5,5,4), (5,4,4),
....
(5,5,1); (5,4,1), ... , (5,1,1);

analog genau

4 + 3 + 2 + 1 = 10

verschiedene Würfe mit 4 als höchster Augenzahl und

3 + 2 + 1 = 6

verschiedene Würfe mit 3 als höchster Augenzahl.

Wegen

21 + 15 + 10 + 6 > 50

sind dies bereits mehr als 50 verschiedene Würfe. Also können in 50 Würfen nicht alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein.

Hinweis zur Korrektur: Aus der Lösungsgestaltung soll hervorgehen, daß die jeweiligen Fallaufzählungen jeden zu erfassenden Fall genau einmal enthalten. Als ausreichend, aber auch im Sinne einer Minimalforderung als notwendig ist hierzu z.B. eine systematische Aufzählung, etwa in der Art des obigen Lösungsweges, zu werten.

240713) Lösung:

Vorrunde: In jeder der sechs Gruppen sind $\frac{6 \cdot 5}{2}$ Spiele, d.s. 15 Spiele, auszutragen. Da sechs Platten vorhanden sind, steht für jede Gruppe stets eine Platte zur Verfügung, an der sie ihre 15 Spiele austragen kann (und da hierbei auch alle sechs Platten ständig belegt sind, ist eine weitere Verkürzung der Spielzeit durch gleichzeitiges Austragen von noch mehr Spielen nicht möglich). Also braucht man für die Vorrunde 15 Viertelstunden, an die sich eine Pause von 4 Viertelstunden anschließt.

Zwischenrunde: Wieder sind in jeder der beiden Gruppen 15 Spiele auszutragen. Da man jeder Gruppe drei Platten zur Verfügung stellen kann, sind wegen 15 : 3 = 5 mindestens 5 Viertelstunden hierfür erforderlich. Sie sind auch ausreichend; denn man kann es so einrichten, daß stets drei der 15 Spiele gleichzeitig ausgetragen werden, z.B. für sechs Spieler A,B,C,D,E,F durch folgende Verteilung:

erste Viertelstunde: (A,B), (C,D), (E,F),
zweite Viertelstunde: (A,C), (B,E), (D,F),
dritte Viertelstunde: (A,D), (B,F), (C,E),
vierte Viertelstunde: (A,E), (B,D), (C,F),
fünfte Viertelstunde: (A,F), (B,C), (D,E).

(Wieder ist eine weitere Verkürzung nicht möglich, da alle Platten ständig belegt sind.) Nach der somit ermittelten Spielzeit von 5 Viertelstunden schließt sich eine Pause von 1 Viertelstunde an.

Endrunde: Diesmal sind $\frac{4 \cdot 3}{2}$ Spiele, d.s. sechs Spiele, auszutragen. Es können gleichzeitig stets nur zwei Spiele ausgetragen werden, da insgesamt nur vier Spieler in der Endrunde sind. Also sind wegen 6 : 2 = 3 mindestens 3 Viertelstunden erforderlich. Sie sind auch ausreichend; denn man kann es so einrichten, daß stets zwei Spiele gleichzeitig stattfinden, z.B. für vier Spieler A,B,C,D durch folgende Verteilung:

erste Viertelstunde: (A,B), (C,D),
zweite Viertelstunde: (A,C), (B,D),
dritte Viertelstunde: (A,D), (B,C).

Fortsetzung Seite 15

Lösungen der 1. Stufe (Schulolympiade)

Fortsetzung von Seite 13

Zu den so ermittelten 3 Viertelstunden Spielzeit kommt noch eine Viertelstunde Pause hinzu.
Damit sind insgesamt

$$15 + 4 + 5 + 1 + 3 + 1 = 29$$

Viertelstunden bis zur Siegerehrung vorzusehen; diese ist hiernach um 15.45 Uhr anzusetzen.

Hinweis zur Korrektur: Zu einer vollständigen Lösung ist es erforderlich, sowohl die Rechenschritte zur Ermittlung der notwendigen Zeit als auch den Existenznachweis einer Spieleinteilung im Rahmen dieser Zeit anzuführen. Eine mehr verbale oder stärker formel- bzw. tabellenmäßige Ausführung ist dabei zulässig.

240714) Lösung:

(a) Da der Umfang die Summe der Längen der kürzesten Dreiecksseite und der beiden anderen Seiten ist, beträgt nach (2) die Summe der Längen der beiden anderen Seiten 25 cm. Also ist 25 nach (1) die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen. Das ist nur möglich, wenn es sich um die Zahlen 12 und 13 handelt. Hiernach (und nochmals wegen (1)) lauten die gesuchten Seitenlängen

11 cm, 12 cm, 13 cm.

(b) Wie in (a) folgt, daß n die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist. Bezeichnet m die Zahl in der Mitte zwischen diesen beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, so lauten sie $m - \frac{1}{2}$ und $m + \frac{1}{2}$; ihre Summe ist also 2m. Da sie n beträgt, muß $m = \frac{n}{2}$ sein. Die beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind somit $\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ und $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$, die Maßzahlen der drei gesuchten Seitenlängen können folglich nur

$$\frac{n}{2} - \frac{3}{2}, \quad \frac{n}{2} - \frac{1}{2}, \quad \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$$

lauten.

(c) Die Aufgabe (b) ist hiernach genau dann lösbar, wenn die zuletzt gefundenen Zahlen natürliche Zahlen größer als 0 sind, die auch die in der Dreiecksungleichung geforderte Bedingung erfüllen, daß die größte der drei Maßzahlen kleiner als die Summe der beiden anderen Maßzahlen ist.

(I) Natürliche Zahlen sind die drei Zahlen genau dann, wenn die (vorzugebende natürliche) Zahl n ungerade ist und $n \geqq 3$ gilt.

(II) Größer als 0 sind sie genau dann, wenn $n > 3$ ist.

(III) Für n = 5 lauten die drei Maßzahlen

1, 2, 3;

sie erfüllen also nicht die Dreiecksungleichung.
Für n = 7 lauten sie

2, 3, 4

und erfüllen somit die Dreiecksungleichung.
Vergrößert man n noch weiter, so vergrößern sich die drei Maßzahlen stets um einen einheitlichen Betrag. Also vergrößert sich die Summe der beiden kürzesten Längen um den doppelten Betrag wie die längste; somit bleibt die Dreiecksungleichung erst recht gültig.

Mit (I),(II),(III) ist bewiesen: In (b) entsteht genau dann eine lösbare Aufgabe, wenn die natürliche Zahl n als

ungerade Zahl $n \geqq 7$

vorgegeben wird.

Hinweise zur Korrektur:

1. Man kann auch erst Aufgabe (b) lösen und dann die Lösung von (a) durch Einsetzen von n = 25 erhalten.
2. Man kann auch stärkeren Gebrauch von (mit geeigneten Variablen geschriebenen) Gleichungen und Ungleichungen machen. Beispielsweise kann man die Maßzahl der Länge der kürzesten Seite mit x bezeichnen, die Gleichung $x + x+1 + x+2 = x + n$ durch $x = \frac{n-3}{2}$ und die Ungleichungen $\frac{n-3}{2} > 0$, $\frac{n+1}{2} < \frac{n-3}{2} + \frac{n-1}{2}$ durch $n > 5$ lösen. Der obige Lösungsweg zeigt, wie sich diese (zu Beginn von Klasse 7 noch nicht systematisch behandelten) Umformungsschritte durch weitgehend anschaulichere Argumente ersetzen lassen.