XXIV. Olympiade Junger Mathematiker

der Deutschen Demokratischen Republik

Achtung: Es wird im allgemeinen jeweils nur einer der möglichen Lösungswege angegeben. Die Teilnehmer können auch andere als die angegebenen Lösungswege benutzen.
Alle exakten und vollständigen Lösungen gelten als gleichwertig.
Infolge Benutzung verschiedener Hilfsmittel bzw. Rechenwege können bei manchen Lösungen geringfügige zahlenmäßige Abweichungen auftreten.

Anmerkung: $\sphericalangle ABC$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Olympiadeklasse 5

240511) Lösung:
Es sind vier Flächenstücke erforderlich.
Eine Zeichnung der geforderten Art zeigt z.B. Abbildung L 240511.

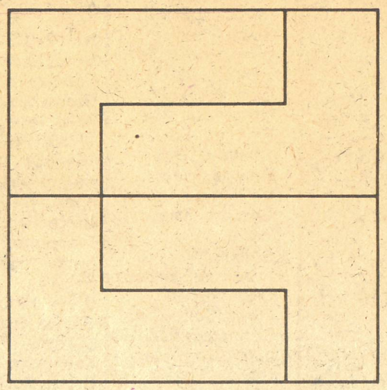

Abb. L 240511

240512) Lösung:
Bei der Probe multiplizierte Roland die falsche Zahl mit 36 und erhielt 756. Wegen 756 : 36 = 21 war diese falsche Zahl 21.
Der Fehler war entstanden, indem er statt einer 7 eine 1 gelesen hatte. Die richtige Zahl hätte also 27 lauten müssen. Mit dieser hätte Roland bei seiner Probe 27 · 36 = 972 erhalten. Dies war somit der gegebene Dividend.
Die Divisionsaufgabe, die Roland lösen sollte, hieß folglich

972 : 27.

240513) Lösung:
Wegen 80 · 80 = 6400 beträgt der Flächeninhalt des Quadrates 6400 mm^2. Die vier abgeschnittenen (rechtwinkligen und gleichschenkligen)[1] Dreiecke ergänzen sich paarweise zu insgesamt zwei Quadraten[2] mit einer Seitenlänge von je 15 mm. Wegen 15 · 15 = 225 beträgt der Flächeninhalt eines solchen Quadrates 225 mm^2. Wegen 6400 - 225 - 225 = 5950 beträgt der Flächeninhalt der schraffierten Fläche also 5950 mm^2, das sind 59,5 cm^2.

1 Diese Angaben werden vom Schüler nicht verlangt.
2 Diese Feststellung kann der Anschauung entnommen werden.

240514) Lösung:
(a) Für e = 5 und k = 2 gibt es genau eine Eintragung[1], die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt; es ist die Eintragung in Abbildung L 240514 a.

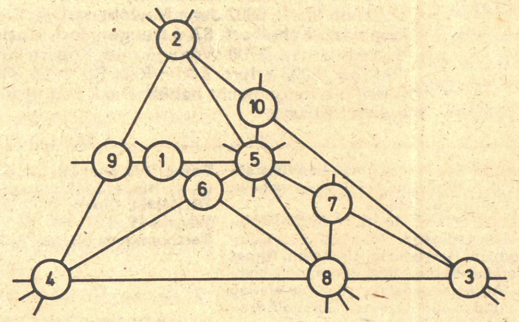

Abb. L 240514 a

(b) Eine weitere Eintragung, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, zeigt Abbildung L 240514 b. (Man kann sogar beweisen, daß es keine weiteren solchen Eintragungen gibt[2].)

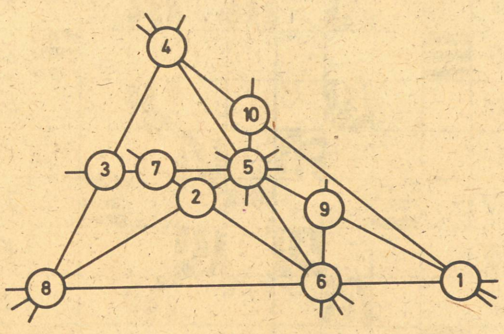

Abb. L 240514 b

(c) Wäre eine Eintragung mit e = 10 möglich, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so folgte:
Wegen a+f+e = b+e+k = c+d+e (= e+h+g) = 15 müßte a+f = b+k = c+d (= h+g) = 5 sein, also wären die Zahlen a,f,b,k,e,d(,h,g) sämtlich kleiner als 5. Das ist unmöglich, da es unter den Zahlen von 1 bis 10 nur vier gibt, die kleiner als 5 sind.
Also kann es keine Eintragung mit e = 10 geben, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

1 Diese Aussage wird vom Schüler nicht verlangt.
2 Wird ein solcher Beweis geführt (z.B. durch vollständiges Diskutieren aller Möglichkeiten für eine oder einige der Variablen und Schlußfolgerungen jeweils auf die anderen Variablen), so ist damit auch der in (c) geforderte Nachweis erbracht.

Olympiadeklasse 6

240611) Lösung:
Werden x Bücher zu je 6 M und y Bücher zu je 4 M gekauft, so gilt

$$6x + 4y = 30. \qquad (1)$$

Wegen $y \geqq 1$ folgt hieraus $6x \leqq 26$, also muß $x < 5$ sein. Daher und wegen $x \geqq 1$ gibt es für x nur die Möglichkeiten der folgenden Tabelle. Von diesen scheiden diejenigen aus, bei denen die Zahl 30 - 6x nicht durch 4 teilbar ist, da aus (1) folgt, daß 4y = 30 - 6x gelten muß. Bei den übrigen Werten von x ergeben sich aus dieser Gleichung die angegebenen Werte für y.

x	6x	30 - 6x = 4y	y
1	6	24	6
2	12	18	-
3	18	12	3
4	24	6	-

Daher können nur die folgenden Anzahlen den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:
Es werden entweder 1 Buch zu 6 M und 6 Bücher zu 4 M
oder 3 Bücher zu 6 M und 3 Bücher zu 4 M
gekauft.
Beide Anzahlangaben erfüllen die Bedingungen (1) und $x \geqq 1$, $y \geqq 1$. Daher sind hiermit alle gesuchten Möglichkeiten genannt.

240612) Lösung:
(1) Genau die Bilder (a), (c) und (e) sind Würfelnetze.
(2) Eine mögliche Anordnung von neun Würfelnetzen der geforderten Art zeigt Abbildung L 240612.
Zehn Felder des Gitternetzes werden nicht benötigt.

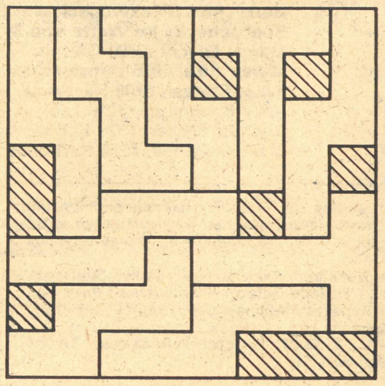

Abb. L 240612

240613) Lösung:

Sichtbar sind von jedem der drei Würfel erstens die vier Seitenflächen (der Mantel). Sie haben die Flächeninhalte

$A_1 = 4 \cdot a_1^2 = 1600\ cm^2$, $A_2 = 4 \cdot a_2^2 = 400\ cm^2$, $A_3 = 4 \cdot a_3^2 = 64\ cm^2$.

Sichtbare Flächenteile sind zweitens Teile der Deckflächen der drei Würfel. Die Flächeninhalte dieser Flächenteile ergeben zusammen den Flächeninhalt der Deckfläche des größten Würfels[1], also

$A_D = a_1^2 = 400\ cm^2$.

Weitere sichtbare Flächenteile kommen nicht vor[1]. Für die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile gilt daher

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_D = 2464\ cm^2$.

---

1 Es wird akzeptiert, diese Feststellungen der Anschauung zu entnehmen.

240614) Lösung:

(a) Wegen 111111111 : 9 = 12345679 ist

z = 12345679

die Zahl, die mit 9 multipliziert 111111111 ergibt.

(b) Aus

12345679 · 9 = 111111111

folgt

12345679 · 72 = 888888888. (1)

Daher hat beispielsweise die Zahl x = 72 die verlangte Eigenschaft, daß die Zahl z · x mit lauter Ziffern 8 geschrieben wird.

(c) Aus (1) folgt[1]

12345679 · 72 · 1000000001 = 888888888 · 1000000001,

d.h.

12345679 · 72000000072 = 888888888888888888. (2)

Also hat (beispielsweise) auch die Zahl 72000000072 die verlangte Eigenschaft.

---

1 Man kann auch (2) durch unmittelbares Ausrechnen gewinnen, ohne (1) heranzuziehen (ähnlich auch (1) ohne Zurückführung auf (a)).

Olympiadeklasse 7

240711) Lösung:

Außer dem einen Jungen, der nach (7) alle drei Arbeitsgemeinschaften besucht, gibt es nach (4), (5) bzw. (6) (und wegen 3-1 = 2, 1-1 = 0 bzw. 3-1 = 2)

genau 2 Jungen, die genau zu den AG "Foto" und "Junge Mathematiker" gehören,

keinen Jungen, der genau zu den AG "Foto" und "Turnen" gehört,

genau 2 Jungen, die genau zu den AG "Junge Mathematiker" und "Turnen" gehören.

Hiernach und nach (1), (2) bzw. (3) (sowie wegen 6-2-0-1 = 3, 5-2-2-1 = 0 bzw. 5-0-2-1 = 2) gibt es

genau 3 Jungen, die genau zur AG "Foto" gehören,

keinen Jungen, der genau zur AG "Junge Mathematiker" gehört,

genau 2 Jungen, die genau zur AG "Turnen" gehören.

Mit dieser Aufzählung sind alle Möglichkeiten erfaßt, mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften anzugehören, und zwar jede solche Möglichkeit genau einmal. Daher ist

1 + 2 + 0 + 2 + 3 + 0 + 2 = 10

die gesuchte Anzahl aller Jungen dieser Klasse.

Hinweise zur Korrektur:

Die Lösungsschritte können auch mit Hilfe von Gleichungen für Variable (etwa F, M, T, FM, FT, MT, FMT als Anzahlen derjenigen Jungen, die genau in den AG mit den jeweils vorkommenden Anfangsbuchstaben sind, wobei z.B. (1) als F + FM + FT + FMT = 6 erscheint) oder auch unter Verwendung eines Mengendiagramms wie in Abbildung L 240711 formuliert sein. Erforderlich ist es bei jeder derartigen Darstellungsvariante des obigen Lösungsweges, daß die (vollständige und disjunkte) Zerlegung in die Mengen mit den Anzahlen F,M,...,FMT sowie die rechnerischen Teilschritte zur Ermittlung dieser Anzahlen ersichtlich sind.

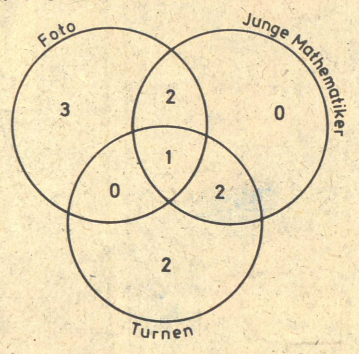

Abb. L 240711

240712) Lösung:

(1) Die kleinste Summe der Augenzahlen wird mit dem Wurf (1,1,1) erreicht und beträgt somit 3; die größte Summe tritt beim Wurf (6,6,6) auf und beträgt somit 18.

(2) Es gibt genau die folgenden sechs verschiedenen Würfe, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt:

(6,5,1), (5,5,2), (4,4,4),
(6,4,2), (5,4,3);
(6,3,3,);

(3) Es gibt genau die folgenden verschiedenen Würfe, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist:

(6,6,6),
(6,6,5), (6,5,5)
(6,6,4), (6,5,4), (6,4,4),
(6,6,3), (6,5,3), (6,4,3), (6,3,3),
(6,6,2), (6,5,2), (6,4,2), (6,3,2), (6,2,2),
(6,6,1); (6,5,1); (6,4,1); (6,3,1); (6,2,1); (6,1,1).

Ihre Anzahl beträgt

6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21.

(4) In entsprechender Weise gibt es genau die folgenden

5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15

verschiedenen Würfe mit 5 als höchster Augenzahl

(5,5,5),
(5,5,4), (5,4,4),
....
(5,5,1); (5,4,1), ... , (5,1,1);

analog genau

4 + 3 + 2 + 1 = 10

verschiedene Würfe mit 4 als höchster Augenzahl und

3 + 2 + 1 = 6

verschiedene Würfe mit 3 als höchster Augenzahl.

Wegen

21 + 15 + 10 + 6 > 50

sind dies bereits mehr als 50 verschiedene Würfe. Also können in 50 Würfen nicht alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein.

Hinweis zur Korrektur: Aus der Lösungsgestaltung soll hervorgehen, daß die jeweiligen Fallaufzählungen jeden zu erfassenden Fall genau einmal enthalten. Als ausreichend, aber auch im Sinne einer Minimalforderung als notwendig ist hierzu z.B. eine systematische Aufzählung, etwa in der Art des obigen Lösungsweges, zu werten.

240713) Lösung:

Vorrunde: In jeder der sechs Gruppen sind $\frac{6 \cdot 5}{2}$ Spiele, d.s. 15 Spiele, auszutragen. Da sechs Platten vorhanden sind, steht für jede Gruppe stets eine Platte zur Verfügung, an der sie ihre 15 Spiele austragen kann (und da hierbei auch alle sechs Platten ständig belegt sind, ist eine weitere Verkürzung der Spielzeit durch gleichzeitiges Austragen von noch mehr Spielen nicht möglich). Also braucht man für die Vorrunde 15 Viertelstunden, an die sich eine Pause von 4 Viertelstunden anschließt.

Zwischenrunde: Wieder sind in jeder der beiden Gruppen 15 Spiele auszutragen. Da man jeder Gruppe drei Platten zur Verfügung stellen kann, sind wegen 15 : 3 = 5 mindestens 5 Viertelstunden hierfür erforderlich. Sie sind auch ausreichend; denn man kann es so einrichten, daß stets drei der 15 Spiele gleichzeitig ausgetragen werden, z.B. für sechs Spieler A,B,C,D,E,F durch folgende Verteilung:

erste Viertelstunde: (A,B), (C,D), (E,F),
zweite Viertelstunde: (A,C), (B,E), (D,F),
dritte Viertelstunde: (A,D), (B,F), (C,E),
vierte Viertelstunde: (A,E), (B,D), (C,F),
fünfte Viertelstunde: (A,F), (B,C), (D,E).

(Wieder ist eine weitere Verkürzung nicht möglich, da alle Platten ständig belegt sind.) Nach der somit ermittelten Spielzeit von 5 Viertelstunden schließt sich eine Pause von 1 Viertelstunde an.

Endrunde: Diesmal sind $\frac{4 \cdot 3}{2}$ Spiele, d.s. sechs Spiele, auszutragen. Es können gleichzeitig stets nur zwei Spiele ausgetragen werden, da insgesamt nur vier Spieler in der Endrunde sind. Also sind wegen 6 : 2 = 3 mindestens 3 Viertelstunden erforderlich. Sie sind auch ausreichend; denn man kann es so einrichten, daß stets zwei Spiele gleichzeitig stattfinden, z.B. für vier Spieler A,B,C,D durch folgende Verteilung:

erste Viertelstunde: (A,B), (C,D),
zweite Viertelstunde: (A,C), (B,D),
dritte Viertelstunde: (A,D), (B,C).

Fortsetzung Seite 15