XXIV. Olympiade Junger Mathematiker

der Deutschen Demokratischen Republik 1. Stufe (Schulolympiade)

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen werden ab Oktober 1984 veröffentlicht.

Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärksten Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

240511

Aus Flächenstücken wie in Abb. A 240511 kann man eine Quadratfläche zusammensetzen, deren Seitenlänge 8 cm beträgt. Wieviele solcher Flächenstücke sind hierzu erforderlich?

Weise die Richtigkeit deiner Antwort durch eine Zeichnung nach!

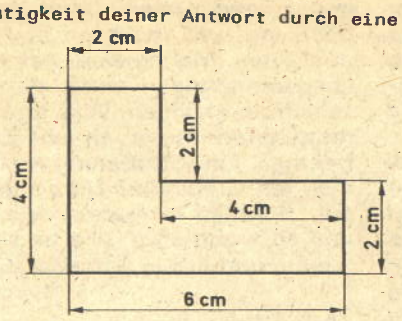


Abb. A 240511

240512

Roland löste eine Divisionsaufgabe. Er erhielt als Ergebnis den Quotienten 36. Roland machte die Probe, indem er den Divisor mit diesem Quotienten multiplizierte. Dabei las er versehentlich im Divisor statt einer Ziffer 7 eine 1 und erhielt als Ergebnis dieser Multiplikation nicht den gegebenen Dividenden, sondern die Zahl 756.

Wie hieß die Divisionsaufgabe, die Roland lösen sollte?

240513

Die schraffierte Fläche in Abbildung A 240513 entsteht aus einem Quadrat, von dem vier gleichgroße Dreiecke abgeschnitten werden. Berechne aus den in Millimeter angegebenen Maßen den Flächeninhalt der schraffierten Fläche in Quadratzentimeter!

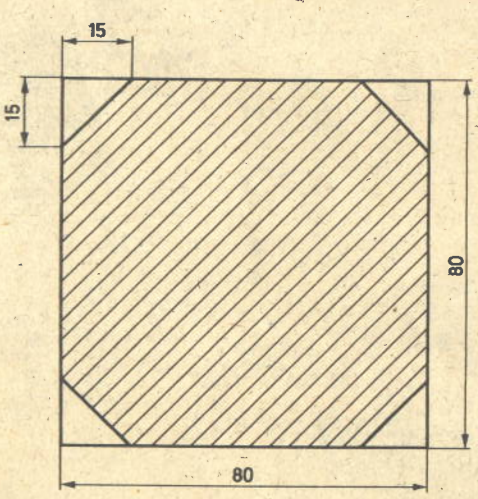
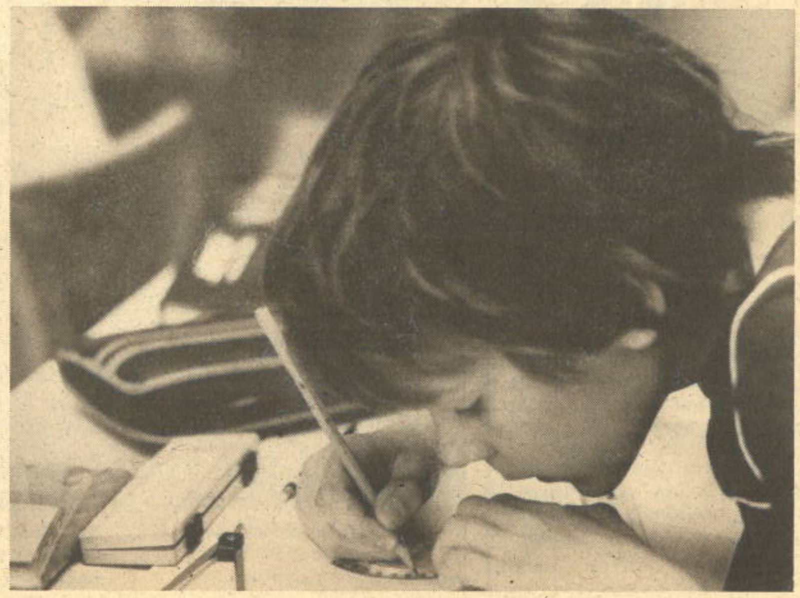


Abb. A 240513



240514

In die Felder der Abbildung A 240514 soll für jeden Buchstaben eine der Zahlen von 1 bis 10 eingetragen werden. Jede dieser Zahlen soll genau einmal vorkommen. Auf jeder eingezeichneten Geraden soll die Summe der Zahlen 15 betragen; es soll also gelten:

$a+b+c = a+f+e = a+g+k = b+d = b+e+k = b+f+h = c+d+e = c+i+k = e+h+g = e+i = 15.$

(a) Gib eine solche Eintragung an, bei der zusätzlich festgelegt wird, daß e = 5 und k = 2 ist!

(b) Gib eine weitere von (a) verschiedene Eintragung an, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt! (Für e und k dürfen auch andere als die in (a) eingesetzten Zahlen verwendet werden.)

(c) Beweise, daß es keine Eintragung gibt, bei der alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind und außerdem e = 10 gilt!

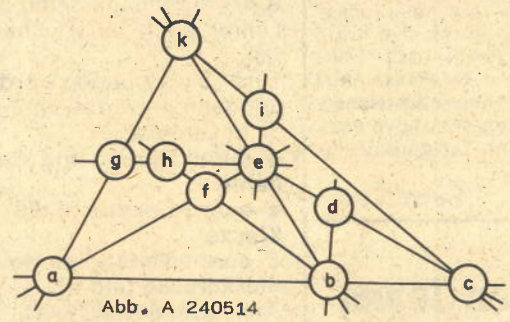


Abb. A 240514

Olympiadeklasse 6

240611

Zum Pioniergeburtstag sollen die tüchtigsten Altstoffsammler ausgezeichnet werden. Hierzu will die Pionierleiterin Bücher zu je 6 M und zu je 4 M kaufen, von jeder Sorte mindestens eins, andere Sorten aber nicht. Insgesamt will sie 30 M für diese Bücher ausgeben.

Gib alle Möglichkeiten an, welche Anzahlen von Büchern der beiden Sorten gewählt werden können, um diesen Bedingungen zu entsprechen!

240612

Michael zeichnet fünf verschiedene Bilder: Abbildung A 240612 (a) bis (e). Er behauptet, daß es Körpernetze von Würfeln seien.

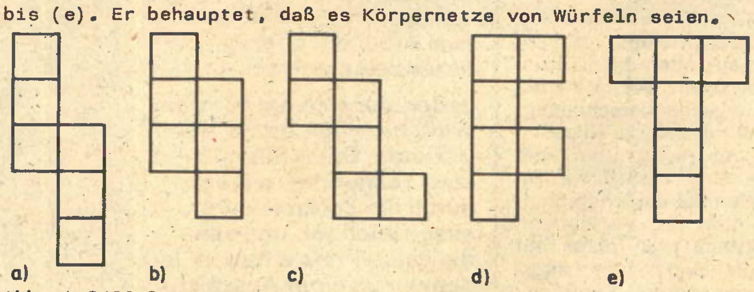


Abb. A 240612

(1) Gib alle diejenigen unter den Bildern (a) bis (e) an, für

die Michaels Behauptung wahr ist! (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

(2) Zeige, daß es möglich ist, aus einem quadratischen Gitternetz von 8 cm Seitenlänge, wie es Abb. A 240612 (f) darstellt, neun Würfelnetze der in Aufgabe (1) gefundenen Art auszuschneiden! Es soll erlaubt sein, die Würfelnetze unverändert oder umgeklappt (spiegelbildlich) zu erhalten. Jedes in (1) gefundene Würfelnetz soll mindestens einmal vorkommen. Die Seitenlänge der einzelnen Quadrate in (1) soll dieselbe sein wie in (2), also 1 cm.
Zeichne derartige neun Würfelnetze in ein Gitternetz ein! Wieviele Felder des Gitternetzes werden dabei nicht benötigt?

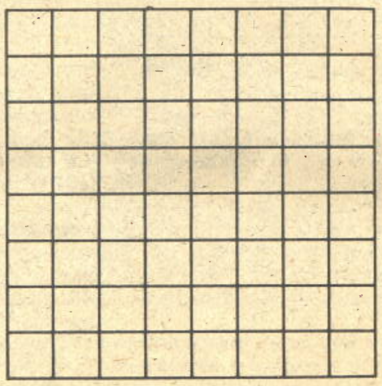


Abb. A 240612 (f)

240613

Wenn man einen Würfel auf einen Tisch stellt, so daß er nirgends seitlich über die Tischplatte hinausragt, so sind von seinen sechs Flächen genau fünf sichtbar. Ebenso kann man einen kleineren Würfel so auf einen größeren stellen, daß von den sechs Flächen des kleineren Würfels genau fünf sichtbar sind, während die sechste vollständig auf dem größeren Würfel aufliegt, ohne seitlich über ihn hinauszuragen. In dieser Art sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm, $a_3 = 4$ cm der Größe nach so übereinander gestellt werden, daß der größte Würfel zuunterst auf der Tischplatte steht.
Wie groß ist dann die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile der drei Würfel?

240614

Rita multipliziert eine Zahl z mit 9 und erhält als Ergebnis 111111111.

(a) Um welche Zahl z handelt es sich?

(b) Ermittle eine Zahl x, die folgende Eigenschaft besitzt! Wenn man x mit der in (a) ermittelten Zahl z multipliziert, dann erhält man als Produkt eine Zahl, die mit lauter Ziffern 8 (in normaler Schreibweise des Zehnersystems) geschrieben wird.

(c) Gibt es außer der in (b) ermittelten Zahl x noch weitere Zahlen, die ebenfalls diese Eigenschaft besitzen? Wenn dies der Fall ist, so ermittle eine weitere solche Zahl!

Olympiadeklasse 7

240711

Über die Jungen einer Schulklasse ist folgendes bekannt:
Jeder Junge dieser Klasse gehört mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften "Foto", "Junge Mathematiker", "Turnen" an.
Ferner gelten folgende Aussagen:

(1) Genau sechs Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Foto".

(2) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Junge Mathematiker".

(3) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Turnen".

Weiterhin gelten über die Jungen dieser Klasse auch die folgenden Aussagen:

(4) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG "Foto" als auch zur AG "Junge Mathematiker".

(5) Genau ein Junge gehört sowohl zur AG "Foto" als auch zur AG "Turnen".

(6) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG "Junge Mathematiker" als auch zur AG "Turnen".

Schließlich gilt auch die Aussage

(7) Genau einer der Jungen dieser Klasse nimmt an allen drei Arbeitsgemeinschaften teil.

(Dagegen ist zu beachten, daß in (1) bis (6) nichts darüber ausgesagt wird, ob die betreffenden Jungen außer den jeweils genannten Arbeitsgemeinschaften noch weiteren Arbeitsgemeinschaften angehören.)
Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahl aller Jungen dieser Klasse eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Anzahl an!

240712

Peter und Klaus würfeln mit drei Würfeln. Sie notieren nach jedem Wurf die drei erhaltenen Augenzahlen a, b, c in der Darstellung (a,b,c), wobei sie diese drei Zahlen so angeordnet haben, daß $a \geq b \geq c$ gilt. Sie bezeichnen zwei Würfe genau dann als voneinander "verschieden", wenn bei dieser Schreibweise mindestens ein Unterschied zwischen den beiden Darstellungen auftritt.

(1) Welches ist die kleinste Summe und welches ist die größte Summe der drei Augenzahlen, die bei einem Wurf auftreten kann?

(2) Beim Spiel fragt Peter: "Wieviel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt?" Beantworte diese Frage!

(3) Klaus überlegt: "Wieviel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist?" Ermittle auch diese Anzahl!

(4) Nach genau 50 Würfen beenden die beiden Schüler ihr Würfelspiel. Sie fragen sich, ob dabei alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein können. Beantworte diese Frage und beweise deine Antwort!

240713

In einem Ferienlager wird ein Tischtennisturnier geplant, das folgendermaßen ablaufen soll:
Die 36 Teilnehmer tragen zunächst Vorrundenspiele in sechs Gruppen zu je sechs Spielern aus, und zwar spielt von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden genau einmal.
Die jeweils beiden Erstplazierten einer jeden Gruppe gelangen in die Zwischenrunde. Diese 12 Teilnehmer der Zwischenrunde werden neu in zwei Gruppen zu je sechs Spielern eingeteilt, und dann spielt in der Zwischenrunde wieder von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden.
Die jeweils beiden Erstplazierten jeder dieser zwei Gruppen gelangen in die Endrunde. Diese vier Teilnehmer der Endrunde ermitteln durch Spiele jeder gegen jeden die Medaillengewinner.

Das Turnier soll um 8.30 Uhr beginnen. Zwischen Vor- und Zwischenrunde soll ein Pause von einer Stunde eingeplant werden; nach Abschluß der Zwischenrunde wird nochmals eine Pause von 15 Minuten eingeplant, und zwischen dem Abschluß der Endrunde und der Siegerehrung ist wiederum eine Pause von 15 Minuten vorgesehen.

Wann kann man unter diesen Bedingungen die Siegerehrung frühestens ansetzen, wenn für jedes Spiel (einschließlich der notwendigen Spielerwechsel) 15 Minuten geplant werden und wenn genau sechs Tischtennisplatten zur Verfügung stehen?
Zeige durch eine Aufstellung der Spiele, die jeweils gleichzeitig stattfinden sollen, daß der von dir angegebene Zeitpunkt der Siegerehrung eingehalten werden kann.

240714

(a) Über die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks wird vorausgesetzt:

(1) Diese Maßzahlen sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

(2) Der Umfang des Dreiecks ist um 25 cm länger als die kürzeste Dreiecksseite.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die drei Seitenlängen!

(b) Löse die Aufgabe, wenn die Voraussetzung (2) durch die folgende Voraussetzung (2') ersetzt wird!

(2') Es sei n eine vorgegebene natürliche Zahl. Der Umfang des Dreiecks ist um n Zentimeter länger als die kürzeste Dreiecksseite.

Die gesuchten drei Seitenlängen sind mit Hilfe von n ausgedrückt anzugeben.

(c) Untersuche, welche natürlichen Zahlen n in (2') vorzugeben sind, damit in (b) eine lösbare Aufgabe entsteht!

Die Lösungen bringen wir in der TROMMEL-Ausgabe 38