XXIV. Olympiade Junger Mathematiker

der Deutschen Demokratischen Republik

Achtung: Es wird im allgemeinen jeweils nur einer der möglichen Lösungswege angegeben. Die Teilnehmer können auch andere als die angegebenen Lösungswege benutzen.
Alle exakten und vollständigen Lösungen gelten als gleichwertig.
Infolge Benutzung verschiedener Hilfsmittel bzw. Rechenwege können bei manchen Lösungen geringfügige zahlenmäßige Abweichungen auftreten.

Anmerkung: $\sphericalangle ABC$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Olympiadeklasse 5

240511) Lösung:
Es sind vier Flächenstücke erforderlich.
Eine Zeichnung der geforderten Art zeigt z.B. Abbildung L 240511.

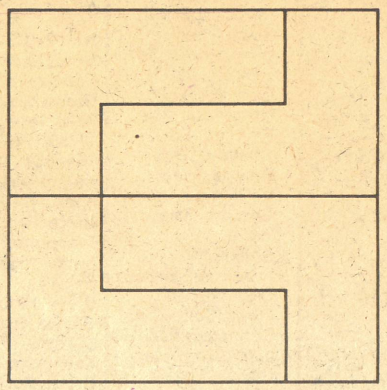

Abb. L 240511

240512) Lösung:
Bei der Probe multiplizierte Roland die falsche Zahl mit 36 und erhielt 756. Wegen 756 : 36 = 21 war diese falsche Zahl 21.
Der Fehler war entstanden, indem er statt einer 7 eine 1 gelesen hatte. Die richtige Zahl hätte also 27 lauten müssen. Mit dieser hätte Roland bei seiner Probe $27 \cdot 36 = 972$ erhalten. Dies war somit der gegebene Dividend.
Die Divisionsaufgabe, die Roland lösen sollte, hieß folglich

972 : 27.

240513) Lösung:
Wegen $80 \cdot 80 = 6400$ beträgt der Flächeninhalt des Quadrates 6400 mm^2. Die vier abgeschnittenen (rechtwinkligen und gleichschenkligen)[1] Dreiecke ergänzen sich paarweise zu insgesamt zwei Quadraten[2] mit einer Seitenlänge von je 15 mm. Wegen $15 \cdot 15 = 225$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Quadrates 225 mm^2. Wegen $6400 - 225 - 225 = 5950$ beträgt der Flächeninhalt der schraffierten Fläche also 5950 mm^2, das sind 59,5 cm^2.

1 Diese Angaben werden vom Schüler nicht verlangt.
2 Diese Feststellung kann der Anschauung entnommen werden.

240514) Lösung:
(a) Für e = 5 und k = 2 gibt es genau eine Eintragung[1], die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt; es ist die Eintragung in Abbildung L 240514 a.

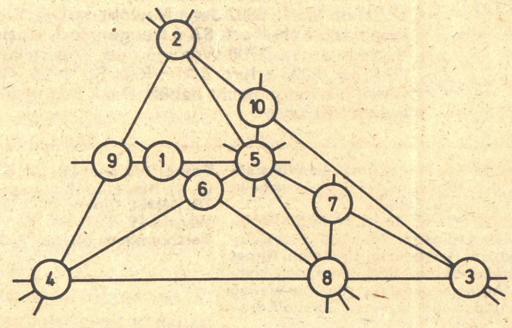

Abb. L 240514 a

(b) Eine weitere Eintragung, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, zeigt Abbildung L 240514 b. (Man kann sogar beweisen, daß es keine weiteren solchen Eintragungen gibt[2].)

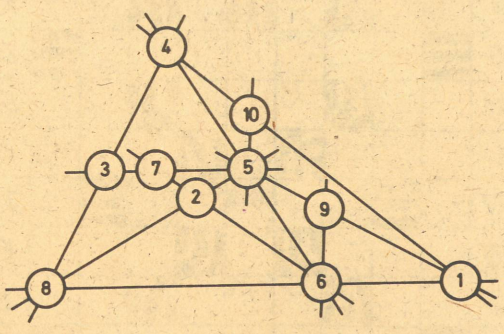

Abb. L 240514 b

(c) Wäre eine Eintragung mit e = 10 möglich, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so folgte:
Wegen a+f+e = b+e+k = c+d+e (= e+h+g) = 15 müßte a+f = b+k = c+d (= h+g) = 5 sein, also wären die Zahlen a,f,b,k,e,d(,h,g) sämtlich kleiner als 5. Das ist unmöglich, da es unter den Zahlen von 1 bis 10 nur vier gibt, die kleiner als 5 sind.
Also kann es keine Eintragung mit e = 10 geben, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

1 Diese Aussage wird vom Schüler nicht verlangt.
2 Wird ein solcher Beweis geführt (z.B. durch vollständiges Diskutieren aller Möglichkeiten für eine oder einige der Variablen und Schlußfolgerungen jeweils auf die anderen Variablen), so ist damit auch der in (c) geforderte Nachweis erbracht.

Olympiadeklasse 6

240611) Lösung:
Werden x Bücher zu je 6 M und y Bücher zu je 4 M gekauft, so gilt

$$6x + 4y = 30. \qquad (1)$$

Wegen $y \geqq 1$ folgt hieraus $6x \leqq 26$, also muß $x < 5$ sein. Daher und wegen $x \geqq 1$ gibt es für x nur die Möglichkeiten der folgenden Tabelle. Von diesen scheiden diejenigen aus, bei denen die Zahl $30 - 6x$ nicht durch 4 teilbar ist, da aus (1) folgt, daß $4y = 30 - 6x$ gelten muß. Bei den übrigen Werten von x ergeben sich aus dieser Gleichung die angegebenen Werte für y.

x	6x	30 - 6x = 4y	y
1	6	24	6
2	12	18	-
3	18	12	3
4	24	6	-

Daher können nur die folgenden Anzahlen den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:
Es werden entweder 1 Buch zu 6 M und 6 Bücher zu 4 M
oder 3 Bücher zu 6 M und 3 Bücher zu 4 M
gekauft.
Beide Anzahlangaben erfüllen die Bedingungen (1) und $x \geqq 1$, $y \geqq 1$. Daher sind hiermit alle gesuchten Möglichkeiten genannt.

240612) Lösung:
(1) Genau die Bilder (a), (c) und (e) sind Würfelnetze.
(2) Eine mögliche Anordnung von neun Würfelnetzen der geforderten Art zeigt Abbildung L 240612.
Zehn Felder des Gitternetzes werden nicht benötigt.

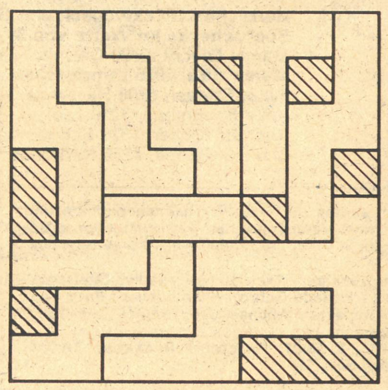

Abb. L 240612