A 11/12

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

231221

Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, so bezeichne s_n ihre n-te Partialsumme:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Man ermittle
a) von jeder arithmetischen Folge (a_n), für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,
b) von jeder geometrischen Folge (a_n), für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,
die ersten fünf Glieder $a_1, a_2, \ldots, a_5$.

231222

Es sei P = ABCA'B'C' ein gerades dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche ABC, der Deckfläche A'B'C' und den parallelen Kanten AA', BB', CC'. Auf diesen seien drei Punkte X,Y,Z gelegen, X zwischen A und A', Y zwischen B und B', Z zwischen C und C'.
Man beweise, daß der Körper K = ABCXYZ das Volumen

$$V_K = \frac{1}{3} F\,(x+y+z)$$

hat, wobei $x = \overline{AX}$, $y = \overline{BY}$, $z = \overline{CZ}$ ist und F den Flächeninhalt von ABC bezeichnet.

231223

Es sei ABCD ein beliebiges Trapez mit AB $\parallel$ CD. Die Längen seiner Seiten und Diagonalen seien folgendermaßen bezeichnet:
$\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$, $\overline{AC} = e$, $\overline{BD} = f$.
Man beweise, daß dann stets die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$af^2 + ce^2 = (a+c)(ac + b^2), \qquad (1)$$

$$ae^2 + cf^2 = (a+c)(ac + d^2). \qquad (2)$$

231224

Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die die Zahl $2^n + 5$ eine Quadratzahl ist.

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

231221) Lösung: 8 Punkte

a) Wenn (a_n) eine arithmetische Folge mit dem Anfangsglied a_1 und der konstanten Differenz d ist, so gilt $s_n = \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$. Daher erfüllt die Folge genau dann $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$, wenn
$15 = 2(2a_1+3d)$, $255 = 4(2a_1+7d)$
gilt. Dieses Gleichungssystem hat genau die Lösungen $a_1 = -\frac{555}{32}$, $d = \frac{225}{16}$. Also hat genau die arithmetische Folge mit diesen a_1, die verlangten s_4, s_8. Ihre ersten fünf Glieder sind

$$-\frac{555}{32},\ -\frac{105}{32},\ \frac{345}{32},\ \frac{795}{32},\ \frac{1245}{32}.$$

b)

(I) Es sei (a_n) eine geometrische Folge, die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ erfüllt. Für ihr Anfangsglied a_1 und ihren konstanten Quotienten q folgt dann:
Es gilt $q \neq 1$; denn aus $q = 1$ würde $s_8 = 8a_1 = s_4$ folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Für geometrische Folgen mit $q \neq 1$ ist $s_1 = a_1\frac{q^n - 1}{q-1}$; daher ergibt sich

$$15 = a_1\frac{q^4 - 1}{q-1}, \qquad 255 = a_1\frac{q^8 - 1}{q-1},$$

also $a_1 \neq 0$, $q^4 - 1 \neq 0$ und

$$17 = \frac{q^8 - 1}{q^4 - 1} = q^4 + 1, \qquad q = 2 \text{ oder } q = -2$$

und hierzu

$$a_1 = 15\frac{q - 1}{q^4 - 1} = q^4 + 1, \quad a_1 = 1 \text{ bzw. } a_1 = -3.$$

Daher können nur die beiden geometrischen Folgen mit $a_1 = 1$, $q = 2$ bzw. mit $a_1 = -3$, $q = -2$ die verlangten s_4, s_8 haben.

(II) Sie haben diese Partialsummen; denn für sie ist

$$s_4 = 1\frac{2^4 - 1}{2-1} = 15,\ s_8 = 1\frac{2^8 - 1}{2-1} = 255 \text{ bzw. } s_4 = (-3)\frac{(-2)^4-1}{-2-1} =$$

$$= 15,\ s_8 = (-3)\frac{(-2)^8 - 1}{-2-1} = 255.$$

Somit haben genau die beiden genannten geometrischen Folgen die verlangten s_4, s_8. Ihre ersten fünf Glieder sind

1, 2, 4, 8, 16 bzw. -3, 6, -12, 24, -48.

<u>231222) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

O.B.d.A. sei $x \leqq y \leqq z$ angenommen. Durch X werde die zur Grundfläche ABC parallele Ebene gelegt. Sie schneidet BY in einem Punkt R, CZ in einem Punkt S und zerlegt den Körper K in das gerade Prisma P_1 = ABCXRS und einen Teilkörper T (der im Fall $x = y = z$ nur noch im Sinne einer Entartung mit dem Volumen $V_T = 0$ zu betrachten ist). In den Fällen $x < y \leqq z$ und $x = y < z$ ist T eine Pyramide mit dem Trapez YRSZ bzw. dem Dreieck RSZ als Grundfläche G und mit dem Punkt X als Spitze. Die Höhenlänge dieser Pyramide ergibt sich als Länge des Lotes XH von X auf die Ebene, in der die Seitenfläche BCSR des Prismas P_1 liegt. Da dieses ein gerades Prisma ist, verläuft XH in der Ebene der Deckfläche RSX von P_1, ist also zugleich die auf RS senkrechte Höhe dieses Dreiecks. Aus RS $\perp$ CZ folgt ferner, daß die Fläche G den Inhalt

$$\frac{1}{2}(\overline{RY} + \overline{SZ})\overline{RS}$$

hat (beim Trapez YRSZ wegen der Flächeninhaltsformel für Trapeze; beim Dreieck RSZ mit $\overline{RY} = 0$ und RS als Höhe auf SZ).

Daher hat T das Volumen

$$V_T = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overline{RY} + \overline{SZ})\overline{RS}\cdot\overline{XH}.$$

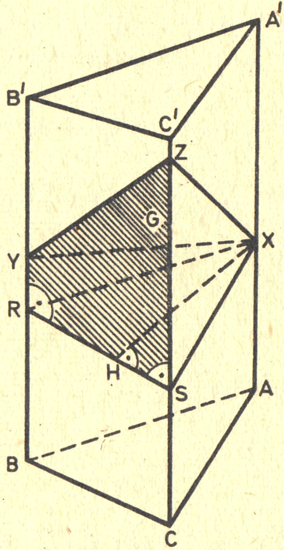

Abb. L 231222

Darin ist $\overline{RY} = y-x$, $\overline{SZ} = z-x$; ferner hat das zu ABC kongruente Dreieck XRS den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2}\overline{RS}\cdot\overline{XH}.$$

Somit gilt

$$V_T = \frac{1}{3}F(y-x+z-x).$$ (Diese Formel erfaßt auch den Fall $x=y=z$.)

Das Prisma P_1 hat das Volumen

$$V_{P_1} = F\cdot x.$$

Damit ergibt sich

$$V_K = V_{P_1} + V_T = \frac{1}{3}F(3x + y - x + z - x) = \frac{1}{3}F(x+y+z).$$

<u>231223) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Ist β die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$, dann ist wegen $AB \parallel CD$ die Größe des Winkels $\sphericalangle BCD$ gleich $180^\circ - \beta$.

Nach dem Kosinussatz, angewandt auf die Dreiecke ABC und BCD, gilt dann

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta, \qquad (3)$$

und $$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos(180^\circ - \beta),$$

also $$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cdot\cos\beta. \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt durch Multiplizieren mit c bzw. a und anschließender Addition

$$af^2 + ce^2 = a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2,$$

also $$af^2 + ce^2 = (a+c)(ac + b^2).$$

Ist α die Größe des Winkels $\sphericalangle DAB$, so ergibt sich analog

$$e^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha$$

und $$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cdot\cos\alpha,$$

woraus $$ae^2 + cf^2 = ac^2 + ad^2 + ca^2 + cd^2,$$

also $$ae^2 + cf^2 = (a+c)(ac + d^2)$$

folgt.

<u>231224) Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

I. Wenn n eine natürliche Zahl ist, für die 2^n+5 Quadratzahl ist, so gibt es eine natürliche Zahl m mit $2^n+5 = m^2$. Dabei ist $n > 0$; denn $2^0+5 = 6$ ist keine Quadratzahl. Also ist 2^n+5 ungerade. Somit ist auch m ungerade, d. h. $m = 2k+1$ mit einer natürlichen Zahl k. Weiter folgt

$$2^n+5 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1,$$
$$2^n \quad = 4k^2+4k-4,$$
$$2^{n-2} = k(k+1)-1.$$

Von den beiden Zahlen $k, k+1$ ist stets eine gerade, also ist $k(k+1)-1$ ungerade.

Daher kann nur $n-2 = 0$, also $n = 2$ sein.

II. Für $n = 2$ ist $2^n+5 = 9$ Quadratzahl.

Somit hat genau die Zahl $n = 2$ die verlangte Eigenschaft.

Anderer Lösungsweg:

Für $n = 0$ und $n = 1$ ist 2^n+5 nicht Quadratzahl, für $n = 2$ ist $2^n+5 = 9$ Quadratzahl.

Angenommen, für ein $n > 2$ wäre 2^n+5 Quadratzahl. Dann gäbe es eine natürliche Zahl $a > 2$ mit

$$2^n+5 = (a+1)^2,$$
$$4(2^{n-2}+1) = a(a+2).$$

Hierin könnte a nicht ungerade sein, da dann auch $a+2$ und folglich $a(a+2)$ ungerade sein müßten, also gäbe es eine natürliche Zahl $b > 1$ mit

$$4(2^{n-2}+1) = 2b \cdot 2(b+1),$$
$$2^{n-2}+1 = b(b+1).$$

Das führt auf den Widerspruch, daß $2^{n-2}+1$ (wegen $n > 2$) ungerade, aber $b(b+1)$ gerade wäre.

Weitere Möglichkeiten,

für $n > 2$ zu schließen, bestehen z. B. darin, für ungerades n festzustellen, daß

$2^{4m+1}+5 = 2 \cdot 16^m+5$ die letzte Ziffer 7 und

$2^{4m+3}+5 = 8 \cdot 16^m+5$

die letzte Ziffer 3 hat,

was für keine Quadratzahl zutrifft.

Für gerades $n > 2$, also $n = 2k$ mit $k > 1$, kann man aus $5 < 2 \cdot 2^k+1$ erhalten, daß 2^n+5 zwischen den Quadratzahlen $(2^k)^2$ und $(2^k+1)^2$ liegt und daher keine Quadratzahl sein kann.

Hinweis: Bei einem Ansatz mit der Umformung $4(2^{n-2}+1) = q^2-1 = (q-1)(q+1)$ ist zu beachten, daß $2^{n-2}+1$ in Faktoren zerfallen kann.

Empfehlung für die Punktverteilung
OKL 11/12 Gesamtpunktzahl: 40

231221	8 Punkte
a) Ermittlung von a_1 und d	3 Pkt.
Ermittlung von a_2 bis a_5	1 Pkt.
b) I Bemerkung, daß $q \neq 1$ ist	1 Pkt.
Ermittlung der beiden Paare (a_1, q)	2 Pkt.
II Ermittlung der jeweiligen a_2 bis a_5	1 Pkt.

231222	10 Punkte
Ermittlung des Inhalts der Fläche G	4 Pkt.
Ermittlung von V_T	3 Pkt.
Ermittlung von V_{P_1}	1 Pkt.
Ermittlung von V_K	2 Pkt.

231223	10 Punkte
Nachweis von (3) und (4)	3 Pkt.
Schluß auf (1)	4 Pkt.
Nachweis von (2)	3 Pkt.

(Punktverteilung sinngemäß, wenn zunächst (2), danach (1) bewiesen wird)

231224	12 Punkte
1. Lösungsweg:	
I. Nachweis, daß $2^n + 5$ ungerade ist	2 Pkt.
Nachweis, daß m ungerade ist	1 Pkt.
$2^{n-2} = k(k+1) - 1$	4 Pkt.
Schluß auf $n = 2$	4 Pkt.
II.	1 Pkt.
2. Lösungsweg:	
Nachweis, daß $n = 2$ die kleinste Zahl ist, für die $2^n + 5$ Quadratzahl ist	3 Pkt.
Beweis dafür, daß $n > 2$ nicht möglich ist	9 Pkt.