Klaus Krüger Kr.
256 Bad Doberan
Kollbruchweg 3

A 10;I XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussage präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

231041

Stellen Sie fest, ob es Quadratzahlen z gibt, die sich in der Form

$$z = n^6 + 3n^5 - 5n^4 - 15n^3 + 4n^2 + 12n + 3$$

mit einer natürlichen Zahl n darstellen lassen!

231042

"Konstruieren Sie ein Dreieck aus $b-c = 10$ cm, $\beta - \gamma = 80^\circ$ und der Differenz $u-v = 4$ cm der Winkelhalbierenden-Abschnitte u,v von a!"

Mit dieser Kurzfassung ist folgende Aufgabe gestellt:
Gegeben seien die Längen $d = 10$ cm, $e = 4$ cm und die Winkelgröße $\delta = 80^\circ$. Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit folgenden Eigenschaften: Wenn die Winkelhalbierende von $\measuredangle$ BAC die Seite BC in D schneidet und wenn b,c,u,v die Längen der Strecken AC, AB, CD, BD sowie β, γ die Größen der Winkel $\measuredangle$ ABC, $\measuredangle$ ACB sind, so gilt

$$b - c = d, \quad u - v = e, \quad \beta - \gamma = \delta.$$

Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Stellen Sie fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Von den nachstehenden Aufgaben 211043A und 211043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

231043 A

Von einem Tetraeder ABCD wird $\overline{BC} = \overline{AD}$, $\overline{CA} = \overline{BD}$ und $\overline{AB} = \overline{CD}$ vorausgesetzt. Die Mittelpunkte der Strecken BC, CA, AB, AD, BD, CD seien in dieser Reihenfolge M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen ein gemeinsamer Punkt P der drei Strecken M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 existiert und daß dieser Punkt P der Mittelpunkt der Umkugel von ABCD (d. h. der durch die vier Punkte A, B, C, D gehenden Kugel) ist!

231043 B

a) Geben Sie eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion f an, die für alle reellen Zahlen x die Eigenschaft

$$f(x+1) = f(x) + (-1)^{[f(x)]} \qquad (1)$$

hat! Dabei bezeichnet, wenn z eine reelle Zahl ist, [z] diejenige ganze Zahl [z] = g, für die $g \leq z < g+1$ gilt.
Beweisen Sie, daß die von Ihnen angegebene Funktion f die Eigenschaft (1) hat! Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion f im Intervall aller x, für die $-3 \leq x \leq 3$ ist!

b) Beweisen Sie, daß jede Funktion f mit der Eigenschaft (1) periodisch mit der Periode 2 sein muß, d. h., daß sie für jedes reelle x die Gleichung ~~f(x+1) = f(x)~~ erfüllt!
$f(x+2) = f(x)$

A 10;II XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

231044

Auf dem Arbeitsblatt sind von einem Körper K die bei schräger Parallelprojektion entstandenen Bilder der sichtbaren Ecken und Kanten abgebildet. Ferner wird vorausgesetzt, daß der Körper K insgesamt von sechs ebenen Vierecken ABCD, ABFE, BCGF, CDHG, DAEH und EFGH begrenzt wird und daß die vier Kanten AE, BF, CG und DH sämtlich zueinander parallel sind.
Konstruieren Sie das Bild D' der nicht sichtbaren Ecke D bei der genannten Parallelprojektion! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, daß der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt D' das Bild der genannten Ecke D ist!

231045

Ermitteln Sie alle diejenigen Winkelgrößen x, für die

$$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ \qquad (1)$$

und

$$\left(2^{\sqrt{\sin x}} - \sin x\right) \cdot \sin x = 1 \qquad (2)$$

gilt!

231046

Von einem Achteck ABCDEFGH werden folgende Eigenschaften vorausgesetzt:

(1) Die Maßzahlen der Längen jeder der Achtecksseiten sind rationale Zahlen.

(2) Die Innenwinkel des Achtecks haben abwechselnd die Größen 150° und 120°.

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen folgt: In dem Achteck ABCDEFGH gilt $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FG}$, $\overline{CD} = \overline{GH}$ und $\overline{DE} = \overline{HA}$.

A 10;II

Arbeitsblatt zu 231044

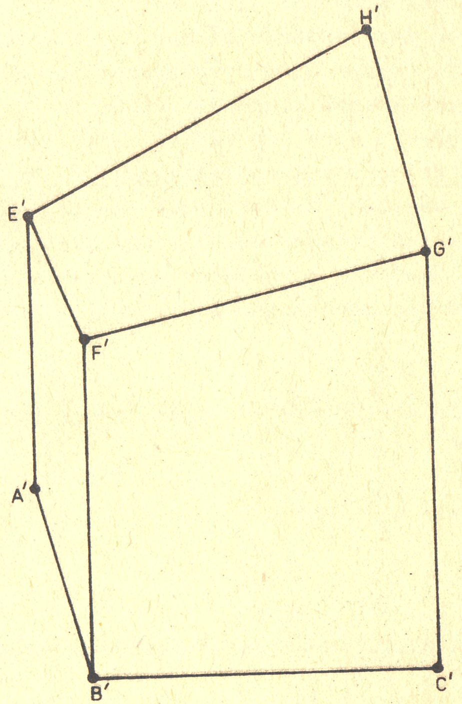

Abb. A 231044

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

231041) Lösung: 6 Punkte

Für jede natürliche Zahl n gilt[1]

$$n^6 + 3n^5 - 5n^4 - 15n^3 + 4n^2 + 12n + 3$$
$$= (n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3) + 3.$$

Von den Zahlen $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ sind zwei durch 3 teilbar, ihr Produkt ist daher durch 9 teilbar. Jede Zahl z, die sich in der genannten Form darstellen läßt, ist folglich durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Daher kann sie keine Quadratzahl sein. Es gibt also keine Quadratzahlen, die sich in der genannten Form darstellen lassen.

Es gibt mehrere andere Lösungsmöglichkeiten. Beispielsweise kann man $n^6 + 3n^5 - 5n^4 - 15n^3 + 4n^2 + 12n$ wie oben oder auch in der Gestalt

$$(n^4 - n^3)(n^2 - 1) + 4n^5 - 4n^4 - 16n^3 + 4n^2 + 12n$$
$$= (n-1)^2\cdot n^2\cdot n(n+1) + 4\cdot(n^5 - n^4 - 4n^3 + n^2 + 3n)$$

darstellen, damit als durch 4 teilbar erkennen und dann ausnutzen, daß es keine Quadratzahl der Form $4k+3$ gibt. Man kann auch sogleich alle Koeffizienten des Polynoms z mod 4 reduzieren und dann ähnlich weiterschließen.

---

1 Diese Umformung kann man z. B. finden, indem man feststellt, daß $n^6 + 3n^5$, $-5n^4 - 15n^3$ und $4n^2 + 12n$ durch $n+3$ teilbar sind. Man erhält $z = n\cdot(n+3)\cdot(n^4 - 5n^2 + 4) + 3$ und kann $n^4 - 5n^2 + 4$ weiter in $(n^2 - 4)\cdot(n^2 - 1)$ zerlegen.
Man kann auch bemerken, daß der Term z für $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ jedesmal den Wert 3 annimmt. Also muß $z-3$ die Linearfaktoren $n+3$, $n+2$, $n+1$, n, $n-1$ und $n-2$ enthalten.
Derartige heuristische Angaben sind zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich (insbesondere ist keine genaue Wiedergabe etwa benutzter algebraischer Lehrsätze für die Herleitung von Faktorzerlegungen gefordert).

231042) Lösung: 8 Punkte

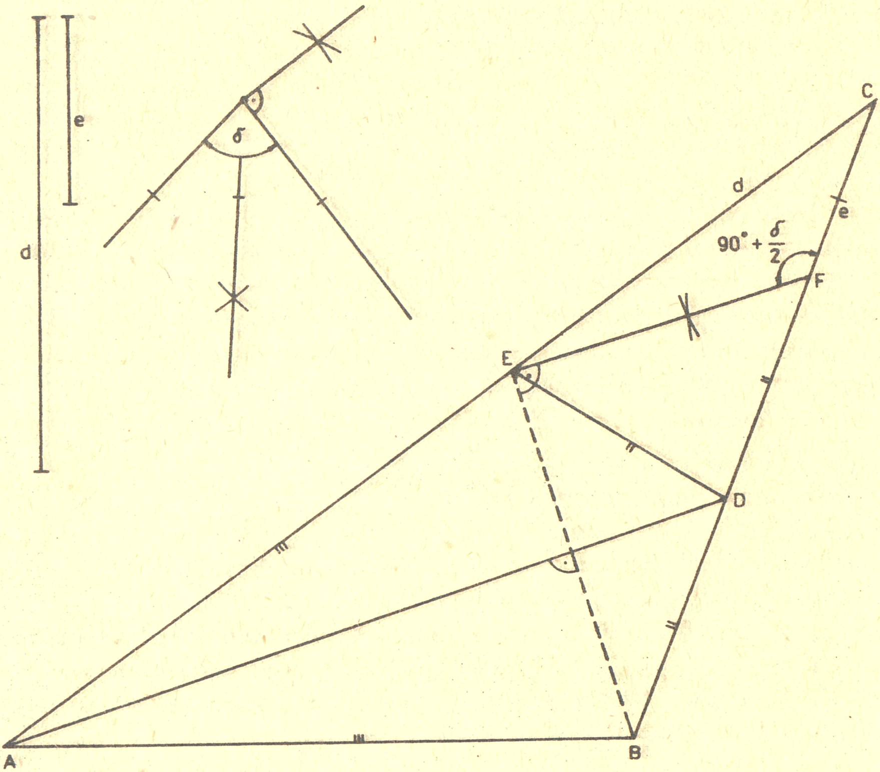

Abb. L 231042

I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Es sei $\overline{\sphericalangle BAC} = \alpha$, auf AC sei E der Punkt mit $\overline{AE} = c$, auf DC sei F der Punkt mit $\overline{DF} = v$. Dann ist $\overline{EC} = d$ und $\overline{FC} = e$. Die Dreiecke ADB und ADE sind nach Kongruenzsatz (sws) kongruent, also liegen B und E symmetrisch zur Geraden durch A,D. Hieraus folgt einerseits $BE \perp AD$, andererseits $\overline{DE} = v$. Also ist nach dem Thalessatz auch $BE \perp EF$ und folglich $EF \parallel AD$. Hiernach gilt $\overline{\sphericalangle CEF} = \overline{\sphericalangle CAD} = \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$ (Stufenwinkel an geschnittenen

Parallelen, Innenwinkelsatz für $\triangle ABC$) und nach dem Innenwinkelsatz für $\triangle EFC$ daher

$$\sphericalangle EFC = 180^\circ - \gamma - (90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}) = 90^\circ + \frac{\delta}{2}.$$

II. Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck EFC aus $\overline{EC} = d$, $\overline{FC} = e$ und $\sphericalangle EFC = 90^\circ + \frac{\delta}{2}$.

(2) Man errichtet die Senkrechte in E auf EF; ihr Schnittpunkt mit derVerlängerung von CF über F hinaus sei B.

(3) Man konstruiert den Mittelpunkt D von BF.

(4) Man konstruiert die Parallele durch D zu EF; ihr Schnittpunkt mit der Verlängerung von CE über E hinaus sei A.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach (2),(3) und der Umkehrung des Thalessatzes liegt E auf dem Kreis um D durch B und F, also ist $\overline{DE} = \overline{DB}$ und daher $\triangle BED$ gleichschenklig mit - wegen (2),(4) - auf DA gelegener Höhe zu BE. Somit liegen B und E symmetrisch bezüglich der Geraden durch A,D; also gilt $\overline{AB} = \overline{AE}$ und daher $b-c = \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{EC} = d$ (siehe (1)).

Ferner folgt $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAD$; d. h., AD ist die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$. Wegen (3), also $\overline{BD} = \overline{DF}$ folgt somit $u-v = \overline{CD} - \overline{BD} = \overline{FC} = e$ (siehe (1)).

Nach (4) ist für $\alpha = \sphericalangle BAC$ schließlich $\frac{\alpha}{2} = \sphericalangle CEF$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen), woraus nach dem (auf $\triangle ABC$ und $\triangle EFC$ angewandten) Innenwinkelsatz und (1) auch

$$\beta - \gamma = 180^\circ - \alpha - 2\gamma = 180^\circ - 2\cdot(\sphericalangle CEF + \sphericalangle ECF) = 2\cdot\sphericalangle EFC - 180^\circ = \delta$$

folgt.

IV. Da für die gegebenen Größen $d > e$ und $90^\circ + \frac{\delta}{2} < 180^\circ$ gilt, ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Wegen $\sphericalangle EFC > 90^\circ$ schneidet die in (2) konstruierte Senkrechte die Verlängerung von CF über F hinaus; d. h., Konstruktionsschritt (2) ist eindeutig ausführbar. Auch Konstruktionsschritt (3) ist eindeutig ausführbar und Konstruktionsschritt (4) ebenfalls; denn da D auf der Verlängerung der Seite CF

des Dreiecks EFC liegt, schneidet die in (4) zur Dreiecksseite EF konstruierte Parallele die Verlängerung der Seite CE dieses Dreiecks.
Daher ist durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

<u>231043 A) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

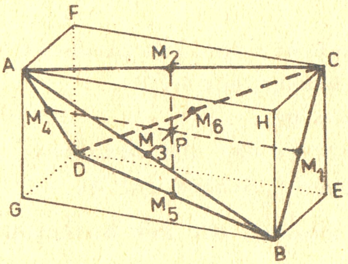

Abb. L 231043 A

Die durch ~~BD~~ BC gehende und gleichzeitig zu AD parallele Ebene sowie die durch AD gehende und gleichzeitig zu BC parallele Ebene bilden ein Paar zueinander paralleler Ebenen.
Dasselbe gilt für die durch CA gehende und zu BD parallele Ebene sowie die durch BD gehende und zu CA parallele Ebene.

Ein drittes Paar zueinander paralleler Ebenen bilden die durch AB gehende zu CD parallele Ebene und die durch CD gehende zu AB parallele Ebene.
Diese drei Ebenenpaare ergeben ein Parallelepiped[1] AGBHFDEC.
Darin ist $\overline{HE} = \overline{AD}$, wegen der Voraussetzung $\overline{BC} = \overline{AD}$ also

$$\overline{HE} = \overline{BC}$$

und somit das Parallelogramm BECH ein Rechteck.
Entsprechend weist man die anderen Seitenflächen des Parallelepipeds als Rechtecke nach; dieses ist somit ein Quader.
Die Punkte $M_1, \ldots, M_6$ sind die Mittelpunkte (Diagonalenschnittpunkte) seiner Seitenflächen. Legt man die drei jeweils zu einem Paar gegenüberliegender Seitenflächen parallelen Ebenen durch M_2, M_3, M_5, M_6 bzw. durch M_3, M_1, M_6, M_4 bzw. durch M_1, M_2, M_4, M_5, so folgt einerseits: Die Gerade durch M_1, M_4, die Gerade durch M_2, M_5 und die Gerade durch M_3, M_6 sind jeweils Schnittgerade von zwei dieser drei Ebenen. Der Schnittpunkt P der drei Ebenen liegt somit auf allen drei Strecken M_1M_4, M_2M_5 und M_3M_6.

---

1 Zu den Kanten dieser Körper kann man auch gelangen, indem man die durch $A, B, C, D, M_1, \ldots, M_6$ gehenden, zu M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 parallelen Geraden verwendet.

Andererseits zerlegen die drei Ebenen den Quader AGBHFDEC in acht kongruente Teilquader[1]. Der Punkt P ist gemeinsame Ecke dieser Teilquader; in jedem Teilquader führt die von P ausgehende Körperdiagonale zu einem der Punkte A,G,B,H,F,D,E,C. Daher hat P von diesen acht Punkten gleiche Abstände, insbesondere gilt $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = \overline{PD}$. Folglich ist P der Mittelpunkt der Umkugel von ABCD.

231043 B) Lösung: 6 Punkte

a) Ein Beispiel ist die durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } [x] \text{ gerade ist} \\ 1, & \text{wenn } [x] \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

für alle reellen x definierte Funktion f.

Beweis von (1) für diese Funktion f: Für jedes reelle x trifft einer der folgenden beiden Fälle zu:

1. Fall: $[x]$ ist gerade.
   Dann ist einerseits $f(x) = 0$, also $f(x) + (-1)^{[f(x)]} = 0 + (-1)^{[0]} = 1$, andererseits $[x+1]$ ungerade, also $f(x+1) = 1$.

2. Fall: $[x]$ ist ungerade.
   Dann ist einerseits $f(x) = 1$, also $f(x) + (-1)^{[f(x)]} = 1 + (-1)^{[1]} = 0$, andererseits $[x+1]$ gerade, also $f(x+1) = 0$.

Der Graph von f hat folgendes Aussehen:

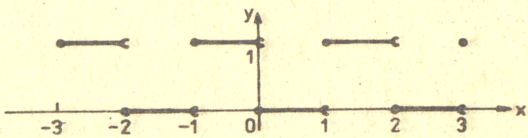

Abb. L 231043 B

b) Für jede Funktion f mit der Eigenschaft (1) gilt:
Für jedes reelle x ist $(-1)^{[f(x)]}$ eine der beiden Zahlen 1, -1, also $[f(x+1)] = \left[f(x) + (-1)^{[f(x)]} \right] = [f(x)] + (-1)^{[f(x)]}$ eine der beiden Zahlen $[f(x)] + 1$, $[f(x)] - 1$, in beiden Fällen also

$$(-1)^{[f(x+1)]} = -(-1)^{[f(x)]}$$

---

1 Zu den Kanten dieser Körper kann man auch gelangen, indem man die durch $A, B, C, D, M_1, \ldots, M_6$ gehenden, zu M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 parallelen Geraden verwendet.

und daher

$$f(x+2) = f(x+1) + (-1)^{[f(x+1)]}$$

$$= f(x) + (-1)^{[f(x)]} - (-1)^{[f(x)]}$$

$$= f(x),$$

w.z.b.w.

L 10;II XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

231044) Lösung: 6 Punkte

Konstruktion

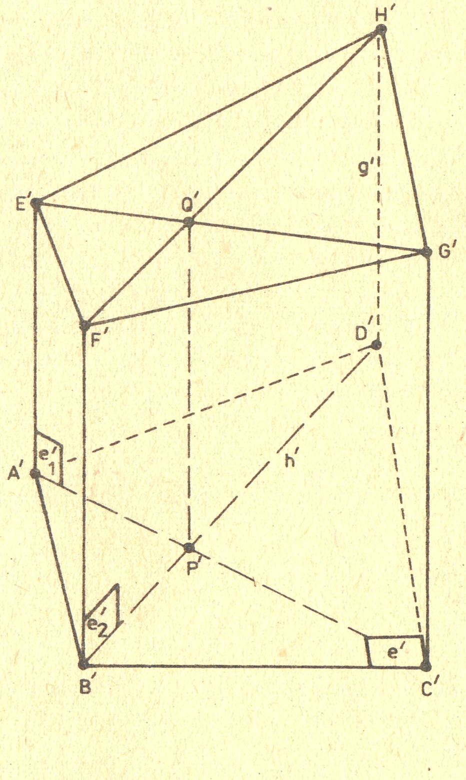

Abb. L 231044

Konstruktionsbeschreibung:

(1) Die Strecke $E'G'$ schneidet die Strecke $F'H'$ in einem Punkt Q'.

(2) Die Parallele durch Q' zu $A'E'$ schneidet die Strecke $A'C'$ in einem Punkt P'.

(3) Die Parallele durch H' zu $A'E'$ schneidet die Gerade durch B',P' in einem Punkt D'.

Beweis, daß der so konstruierte Punkt D' das Bild von D ist:

Da $EFGH$ ein ebenes Viereck ist, schneiden sich EG und FH in einem Punkt Q, und der in (1) konstruierte Punkt Q' ist sein Bild. Die Ebene e_1 durch A,E,G und die Ebene e_2 durch B,F,H gehen beide durch Q, und sie sind beide parallel zu AE. Also ist die durch Q parallel zu AE gehende Gerade die Schnittgerade von e_1 und e_2. Sie schneidet somit die in e_1 liegende Strecke AC in einem Punkt P, und der in (2) konstruierte Punkt P' ist sein Bild. Zugleich ist P als ein Punkt auf der Schnittgeraden h von e_2 mit der Ebene e durch A,B,C nachgewiesen. Ein anderer Punkt dieser Schnittgeraden h ist B. Da aber auch D in e und (wegen $DH \parallel BF$) in e_2 liegt, ist D ebenfalls ein Punkt von h; d. h., die Gerade h durch B und P geht auch durch D; ihr Bild ist die in (3) konstruierte Gerade durch B',P'. Andererseits liegt D auch auf der Parallelen g durch H zu AE, und deren Bild ist die in (3) konstruierte Parallele durch H' zu $A'E'$. Daher ist der in (3) konstruierte Punkt D' das Bild von D.

<u>231045) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Für jedes x mit (1) und $x \neq 90^\circ$ ist $0 \leq \sin x < 1$, also

$$\begin{aligned} &\left(2^{\sqrt{\sin x}} - \sin x\right) \cdot \sin x - 1 \\ \leq\ &(2 - \sin x) \cdot \sin x - 1 \\ =\ &-(1 - \sin x)^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

und daher (2) nicht erfüllt.

Für $x = 90^\circ$ ist $\sin x = 1$, also

$$\begin{aligned} &\left(2^{\sqrt{\sin x}} - \sin x\right) \cdot \sin x \\ =\ &\left(2^{\sqrt{1}} - 1\right) \cdot 1 \\ =\ &1 \end{aligned}$$

und daher (2) erfüllt.

Somit erfüllt genau die Winkelgröße $x = 90^\circ$ die Bedingungen (1) und (2).

<u>231046) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Die Geraden durch A und B bzw. C und D bzw. E und F bzw. G und H mögen einander in den Punkten S,P,Q,R schneiden, wie es die Abbildung L 231046 zeigt. Dann ist SPQR ein Rechteck, da die Dreiecke HSA, BPC, DQE und FRG wegen der Sätze über Nebenwinkel und über die Winkelsumme im Dreieck rechtwinklige Dreiecke mit den rechten Winkeln bei S,P,Q bzw. R sind. Es gilt nämlich:

Die Dreiecke HSA, BPC, DQE und FRG haben nach dem Nebenwinkelsatz je einen Winkel von 30° und einen Winkel von 60°, und zwar so, daß o.B.d.A.

$\overline{\sphericalangle SAH} = \overline{\sphericalangle PCB} = \overline{\sphericalangle QED} = \overline{\sphericalangle RGF} = 60^\circ$ sowie

$\overline{\sphericalangle SHA} = \overline{\sphericalangle PBC} = \overline{\sphericalangle QDE} = \overline{\sphericalangle RFG} = 30^\circ$ gilt.

Es sei nun ferner $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DE} = d$, $\overline{EF} = e$, $\overline{FG} = f$, $\overline{GH} = g$ und $\overline{HA} = h$.

Nach einem bekannten Satz über gleichseitige Dreiecke gilt dann:

$\overline{AS} = \frac{h}{2}$, $\overline{PC} = \frac{b}{2}$, $\overline{EQ} = \frac{d}{2}$, $\overline{GR} = \frac{f}{2}$ sowie

$\overline{SH} = \frac{h}{2}\sqrt{3}$, $\overline{BP} = \frac{b}{2}\sqrt{3}$, $\overline{DQ} = \frac{d}{2}\sqrt{3}$, $\overline{RF} = \frac{f}{2}\sqrt{3}$.

Da SPQR ein Rechteck ist, gilt

$\overline{SP} = \overline{QR}$ und $\overline{SR} = \overline{PQ}$, also

$\frac{h}{2} + a + \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{f}{2}\sqrt{3} + e + \frac{d}{2}$ sowie

$\frac{h}{2}\sqrt{3} + g + \frac{f}{2} = \frac{b}{2} + c + \frac{d}{2}\sqrt{3}$,

woraus man

$\sqrt{3}\,(\frac{b}{2} - \frac{f}{2}) = e + \frac{d}{2} - a - \frac{h}{2}$ und

$\sqrt{3}\,(\frac{h}{2} - \frac{d}{2}) = \frac{b}{2} + c - g - \frac{f}{2}$ erhält.

Da die Maßzahlen von a,b,c,d,e,f,g,h laut Aufgabe rationale Zahlen sein sollen, muß

$\frac{b}{2} - \frac{f}{2} = 0$ und $\frac{h}{2} - \frac{d}{2} = 0$, also

$b = f$ und $h = d$ gelten.

Wegen $e + \frac{d}{2} - a - \frac{h}{2} = 0$ und $\frac{b}{2} + c - g - \frac{f}{2} = 0$
folgt schließlich $e = a$ und $c = g$.
Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

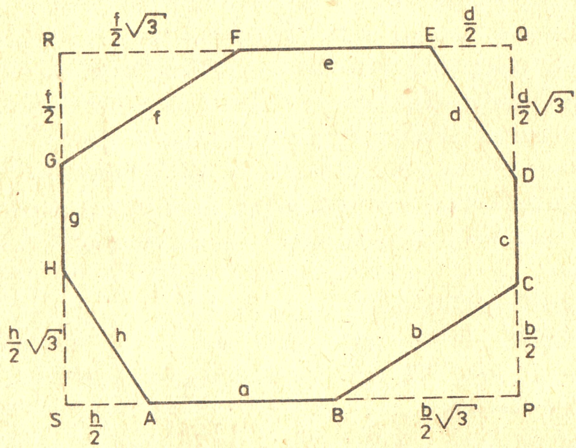

Abb. L 231046