XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

231031

Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare (g;r) aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r, für die

$$\frac{r}{r^2 - 6r + 10} = g$$

gilt!

231032

Von einem Dreieck ABC und einem Punkt D auf der Seite AC wird vorausgesetzt, daß $\overline{\sphericalangle BAC} = \overline{\sphericalangle CBD} = 45^\circ$ und $\overline{\sphericalangle ABD} = \frac{1}{3}\,\overline{\sphericalangle BAC}$ gilt.

Beweisen Sie, daß dann $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ gilt!

231033

Beweisen Sie die folgende Aussage!

Wenn man die Menge aller natürlichen Zahlen so in zwei Mengen A und B einteilt, daß jede natürliche Zahl in genau einer dieser beiden Mengen enthalten ist, dann gibt es eine natürliche Zahl d so, daß in einer der beiden Mengen A,B drei Zahlen der Form a, a+d, a+2d enthalten sind (man könnte auch sagen, daß (mindestens) eine der beiden Mengen A,B eine arithmetische Folge der Länge 3 enthält).

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

231034

Jürgen überlegt: Im Jahre 1983 begann die 23. OJM. Für mich persönlich wird es der 5. Start sein.
Unter Verwendung dieser Zahlen bildet Jürgen die Gleichung

$$1983 + 23 \cdot x^2 = 5 \cdot y^2. \qquad (1)$$

Gibt es ganze Zahlen x und y, für die diese Gleichung (1) gilt?

231035

Ulrike, Vera und Waltraud wollen je ein Rechteck ABCD und dazu einen inneren Punkt P der Strecke CD, einen inneren Punkt Q der Strecke BC sowie noch einen inneren Punkt R der Strecke CD zeichnen.
Ulrike stellt sich die Aufgabe, zu erreichen, daß für den Flächeninhalt F_1 des Dreiecks ABP und den Flächeninhalt F_2 des Dreiecks AQR die Ungleichung $F_1 < F_2$ gilt; Vera will $F_1 = F_2$ und Waltraud $F_1 > F_2$ erreichen.

Untersuchen Sie für jedes der drei Mädchen, ob es sich eine lösbare oder eine unlösbare Aufgabe gestellt hat!

231036

Das Arbeitsblatt zeigt das Bild A'B'C'D'S' einer Pyramide ABCDS in schräger Parallelprojektion sowie das Bild P' eines auf der Kante CS liegenden Punktes P, das Bild Q' eines auf der Kante DS liegenden Punktes Q und das Bild R' eines auf der Fläche ABS liegenden Punktes R (Abb. A 231036).

Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur, die beim Schnitt der Pyramide ABCDS mit der Ebene durch P,Q,R entsteht! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Eine Begründung und Diskussion wird nicht gefordert.

Arbeitsblatt zu 231036

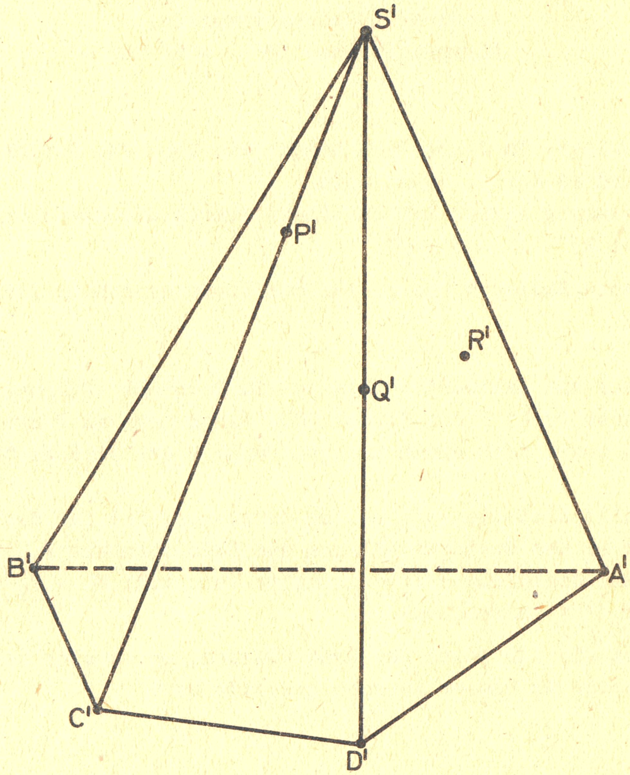

Abb. A 231036

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

231031) Lösung: **7 Punkte**

I. Wenn $(g;r)$ ein Paar mit den verlangten Eigenschaften ist, so folgt:

Ist $g = 0$, so ist $r = 0$.

Ist $g \neq 0$, so folgt: r erfüllt die Gleichung $r^2 - (6 + \frac{1}{g})r + 10 = 0$.

Deren Diskriminante ist folglich nichtnegativ, d. h., es gilt

$$(3 + \frac{1}{2g})^2 - 10 \geqq 0.$$

Daraus folgt

$$\left|3 + \frac{1}{2g}\right| \geqq \sqrt{10}.$$

Da g ganzzahlig und von 0 verschieden ist, gilt $|g| \geqq 1$, also $\frac{1}{|g|} \leqq 1$ und daher $\frac{1}{g} \geqq -1$, $3 + \frac{1}{2g} \geqq 3 - \frac{1}{2} > 0$. Also ist $\left|3 + \frac{1}{2g}\right| = 3 + \frac{1}{2g}$, und es folgt weiter

$$3 + \frac{1}{2g} \geqq \sqrt{10},$$

$$\frac{1}{2g} \geqq \sqrt{10} - 3,$$

wegen $\sqrt{10} - 3 > 0$ also einerseits $\frac{1}{2g} > 0$,

$$g > 0,$$

andererseits $2g \leqq \dfrac{1}{\sqrt{10} - 3} = \sqrt{10} + 3 < 8$,

$$g < 4.$$

Daher verbleiben (im Fall $g \neq 0$) nur die Möglichkeiten der folgenden Tabelle:

g	$r^2 - (6 + \frac{1}{g})r + 10 = 0$	Lösungen dieser Gleichung	
1	$r^2 - 7r + 10 = 0$	$r_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$	$r_1 = 5 \quad r_2 = 2$
2	$r^2 - \frac{13}{2}r + 10 = 0$	$r_{1,2} = \frac{13}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$	$r_1 = 4 \quad r_2 = \frac{5}{2}$
3	$r^2 - \frac{19}{3}r + 10 = 0$	$r_{1,2} = \frac{19}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36}}$	$r_1 = \frac{10}{3} \quad r_2 = 3$

Also können höchstens folgende geordneten Paare die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:
$(0;0)$, $(1;5)$, $(1;2)$, $(2;4)$, $(2;\frac{5}{2})$, $(3;\frac{10}{3})$, $(3;3)$.

II. Diese Paare $(g;r)$ erfüllen die Bedingungen der Aufgabe; denn in ihnen ist jeweils g ganzzahlig, und es gilt:

g	r	$r^2 - 6r + 10$	$\frac{r}{r^2 - 6r + 10}$
0	0	10	0
1	5	$25 - 30 + 10 = 5$	1
1	2	$4 - 12 + 10 = 2$	1
2	4	$16 - 24 + 10 = 2$	2
2	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4} - \frac{60}{4} + \frac{40}{4} = \frac{5}{4}$	2
3	$\frac{10}{3}$	$\frac{100}{9} - \frac{180}{9} + \frac{90}{9} = \frac{10}{9}$	3
3	3	$9 - 18 + 10 = 1$	3

231032) Lösung: 6 Punkte

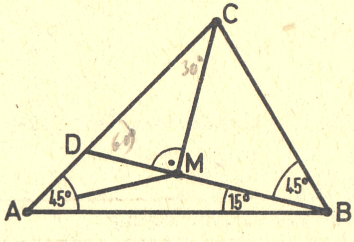

Abb. L 231032

Nach Voraussetzung ist $\overline{\sphericalangle ABD} = 15^\circ$.
Nach dem Dreiecksinnenwinkelsatz folgt $\overline{\sphericalangle ACB} = 75^\circ$, $\overline{\sphericalangle ADB} = 120^\circ$ und daher als Nebenwinkel $\overline{\sphericalangle BDC} = 60^\circ$.
Es sei CM das Lot von C auf BD. Dann ist nach dem Innenwinkelsatz $\overline{\sphericalangle DCM} = 30^\circ$, $\overline{\sphericalangle BCM} = 45^\circ$, und daher ist Δ BCM gleichschenklig mit

$$\overline{MB} = \overline{MC}. \qquad (1)$$

In dem Dreieck DCM, das durch sein Spiegelbild an CM zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Höhe (zugleich Seitenhalbierende) CM ergänzt wird, gilt

$$\overline{DC} = 2\,\overline{MD}. \qquad (2)$$

Der Kreis um M durch B, der wegen (1) auch durch C geht, geht nach der Umkehrung des Peripherie-Zentriwinkelsatzes auch durch A. Also ist auch Δ ACM gleichschenklig mit $\overline{\sphericalangle CAM} = \overline{\sphericalangle ACM} = 30^\circ$. Hieraus folgt nach dem Innenwinkelsatz $\overline{\sphericalangle AMD} = 30^\circ$; daher ist Δ AMD gleichschenklig mit

$$\overline{AD} = \overline{MD}. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt $\overline{DC} = 2\,\overline{AD}$ und damit die Behauptung $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AC}$.

2. Lösungsweg:

Wie im 1. Lösungsweg zeigt man $\overline{\sphericalangle BDC} = 60^\circ$. Danach folgt aus dem Sinussatz

$$\overline{DC} : \overline{BC} = \sin 45^\circ : \sin 60^\circ,$$
$$\overline{AC} : \overline{BC} = \sin 60^\circ : \sin 45^\circ,$$

also $\dfrac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\sin^2 45^\circ}{\sin^2 60^\circ} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\cdot 3} = \dfrac{2}{3}$ und damit die Behauptung.

231033) Lösung: 7 Punkte

Kommen in einer der beiden Mengen A,B drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen n, n+1, n+2 vor, so bilden sie eine arithmetische Folge der behaupteten Art.

Kommen solche Zahlen n, n+1, n+2 aber weder in A noch in B vor, so gilt: Wenn man die natürlichen Zahlen in der Reihenfolge 0,1,2,3,... durchläuft und dabei beim Abzählen, wieviele natürliche Zahlen jeweils unmittelbar hintereinander in derselben der beiden Mengen A,B sind, der Reihe nach die Anzahlen c_1, c_2, c_3, ... erhält, so ist jede dieser Anzahlen c_i entweder gleich 1 oder gleich 2.

Man kann nun alle Möglichkeiten diskutieren, die für solche der Reihe nach erhaltenen Anzahlen c_i, c_{i+1}, c_{i+2} bestehen. Dabei setzt man die Diskussion in einigen Fällen auf die nächsten Anzahlen c_{i+3}, c_{i+4} fort. Außerdem kann man die Diskussion einiger Fälle dadurch auf andere Fälle zurückführen, daß man die Anzahlen in der umgekehrten Reihenfolge c_{i+2}, c_{i+1}, c_i betrachtet[1]. (Um auch hierfür die vorgesehene Fortsetzung auf die nächsten Anzahlen, die dann wegen der Reihenfolge-Umkehrung die Anzahlen

---

1 Diese Betrachtung der umgekehrten Reihenfolge ist für eine vollständige Lösung nicht erforderlich; sie verringert nur die Anzahl der explizit zu diskutierenden Fälle.

c_{i-1}, c_{i-2} sind, zu ermöglichen, ist für den Index i ein genügend großer Wert vorzusehen.)
Für (c_i, c_{i+1}, c_{i+2}) gibt es insgesamt nur die Möglichkeiten (1,1,1), <u>(1,1,2)</u>, (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), <u>(2,2,1)</u>, (2,2,2).
Bei diesen verläuft die Diskussion der unterstrichenen Möglichkeiten (1,1,2) und (2,2,1) so wie die Diskussion von (2,1,1) bzw. (1,2,2), jeweils in umgekehrter Reihenfolge. Daher genügt es, nur die nicht unterstrichenen Fälle zu diskutieren.
Die erste Anzahl c_i in diesen Tripeln (c_i, c_{i+1}, c_{i+2}) sei beim Abzählen von o.B.d.A. in A vorkommenden natürlichen Zahlen erhalten worden; die dabei als erste (bzw. im Fall $c_i = 1$ als einzige) abgezählte Zahl sei n. Mit diesen Bezeichnungen betrachte man zunächst:

<u>1. Fall:</u> $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2}) = (1,1,1)$. In diesem Fall sind die Zahlen <u>n-1</u> in B; n in A; <u>n+1</u> in B; n+2 in A; <u>n+3</u> in B gelegen. Die unterstrichenen Zahlen bilden eine arithmetische Folge der behaupteten Art.

<u>2. Fall:</u> $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2}) = (1,2,2)$ oder $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2}) = (2,1,2)$.
In diesem Fall sind die Zahlen
<u>n-1</u> in B; n in A; n+1, <u>n+2</u> in B; n+3, n+4 in A; <u>n+5</u> in B
bzw.
<u>n-1</u> in B; n, n+1 in A; <u>n+2</u> in B; n+3, n+4 in A; <u>n+5</u> in B gelegen.

Um die noch verbleibenden Tripel (1,2,1), (2,1,1), (2,2,2) zu diskutieren, betrachtet man alle möglichen Fortsetzungen $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3})$, indem man für die vierte Anzahl c_{i+3} darin jeweils die beiden Möglichkeiten 1 oder 2 untersucht, d. h., man hat als $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3})$ die Quadrupel (1,2,1,1), (1,<u>2,1,2</u>), (2,<u>1,1,1</u>), (2,1,1,2), (2,<u>2,2,1</u>), (2,2,2,2) zu untersuchen. Diejenigen, in denen ein Teiltripel unterstrichen ist, sind bereits mit dessen Diskussion im 1. oder 2. Fall erfaßt. Von den übrigen betrachte man zunächst:

<u>3. Fall:</u> $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}) = (2,1,1,2)$. In diesem Fall sind die Zahlen <u>n</u>, n+1 in A; n+2 in B; <u>n+3</u> in A; n+4, n+5 in B; <u>n+6</u> in A gelegen.

4. Fall: $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}) = (2,2,2,2)$. In diesem Fall sind die Zahlen n, n+1 in A; n+2, n+3 in B; n+4, n+5 in A; n+6, n+7 in B; n+8 in A gelegen.

Zur nun noch ausstehenden Diskussion von (1,2,1,1) sind die Quintupel
(1,2,1,1,1), (1,2,1,1,2)
zu betrachten, die aber bereits in den Fällen 1 und 3 erfaßt sind. Damit ist der geforderte Beweis geführt.

Andere Möglichkeiten einer Lösung durch systematisches Probieren ergeben sich z. B., wenn man davon ausgeht, daß von den drei natürlichen Zahlen 0,1,2 (mindestens) zwei in derselben der beiden Mengen A,B enthalten sein müssen, o.B.d.A. in A. Ist dabei 0 in A, so hat man die beiden Fälle $0;1 \in A$ und $0;2 \in A$ weiter zu dikutieren. Ist aber $0 \notin A$, so sind $1;2 \in A$, und die weitere Diskussion verläuft analog wie im Fall $0;1 \in A$ ("Verschiebung um 1").

Nun zählt man der Reihe nach alle Fortsetzungsmöglichkeiten auf, z. B. für $0;1 \in A$, $2 \in B$

$$\text{entweder} \left\{\begin{array}{lccccc} \text{in A:} & 0 & 1 & & 3 & \\ \text{in B:} & & & 2 & & \end{array}\right\} \text{oder} \left\{\begin{array}{lccccc} \text{in A:} & 0 & 1 & & & \\ \text{in B:} & & & 2 & 3 & \end{array}\right\} \text{und dann}$$

$$\text{entweder} \left\{\begin{array}{lccccc} \text{in A:} & 0 & 1 & & 3 & 4 \\ \text{in B:} & & & 2 & & \end{array}\right\} \text{oder} \left\{\begin{array}{lccccc} \text{in A:} & 0 & 1 & & 3 & \\ \text{in B:} & & & 2 & & 4 \end{array}\right\} \text{oder}$$

$$\text{oder:} \left\{\begin{array}{lccccc} \text{in A:} & 0 & 1 & & & 4 \\ \text{in B:} & & & 2 & 3 & \end{array}\right\} \text{oder} \left\{\begin{array}{lccccc} \text{in A:} & 0 & 1 & & & \\ \text{in B:} & & & 2 & 3 & 4 \end{array}\right\}, \text{ und diese}$$

Aufzählung setzt man jeweils so lange fort, bis eine Folge der behaupteten Art erreicht ist (z. B. im zuletzt erreichten Unterfall).

Bemerkung: Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Existenz einer arithmetischen Folge der behaupteten Art bereits gesichert ist, wenn nur eine Menge aus 9 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen in A und B eingeteilt wird.

 XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

231034) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, es gäbe solche ganzen Zahlen.
Wäre dabei x gerade, so auch $23 \cdot x^2$, also wäre $1983 + 23 \cdot x^2$ ungerade; d. h., $5 \cdot y^2$ und somit auch y müßten ungerade sein. Hiernach gäbe es ganze Zahlen m, n mit $x = 2m$, $y = 2n+1$, und es folgte

$$1983 + 23 \cdot 4m^2 = 5 \cdot 4n^2 + 5 \cdot 4n + 5,$$
$$1978 = 4 \cdot (5n^2 + 5n - 23m^2).$$

Das ist ein Widerspruch, da 1978 nicht durch 4 teilbar ist.
Wäre aber x ungerade, so auch $23 \cdot x^2$, also wären $1983 + 23 \cdot x^2$, d. h. $5 \cdot y^2$ und somit auch y gerade. Dann gäbe es ganze Zahlen m, n mit $x = 2m+1$, $y = 2n$, und es folgte

$$1983 + 23 \cdot 4m^2 + 23 \cdot 4m + 23 = 5 \cdot 4n^2,$$
$$2006 = 4 \cdot (5n^2 - 23m^2 - 23m).$$

Das ist ebenfalls ein Widerspruch, da 2006 nicht durch 4 teilbar ist.
Da sich in jedem Fall ein Widerspruch ergeben hat, war die Annahme falsch. Somit gibt es keine ganzen Zahlen x, y, die (1) erfüllen.

Ein anderer Lösungsansatz ergibt sich, indem man von der Annahme (1) auf $1984 + 24x^2 - 4y^2 = x^2 + y^2 + 1$ und damit auf die Aussage schließt, daß $x^2 + y^2 + 1$ durch 4 teilbar wäre. Das kann man z. B. durch Diskussion der Möglichkeiten für die Restklassen der Quadratzahlen x^2, y^2 mod 4 widerlegen.

231035) Lösung: 7 Punkte

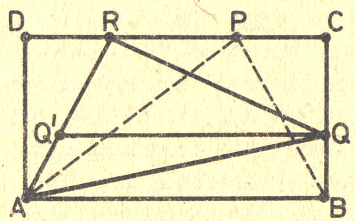

Abb. L 231035

Das Lot von P auf AB hat die Länge $\overline{BC}$. Also ist $F_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}$.
Die Parallele durch Q zu AB schneidet AR in einem Punkt Q'. Sind F_3, F_4 die Flächeninhalte der Dreiecke Q'QR und Q'QA, so ist $F_2 = F_3 + F_4$. Addiert man die Längen der Lote von R und

von A auf die Gerade durch Q', Q, so erhält man $\overline{CQ} + \overline{BQ} = \overline{BC}$. Also ist $F_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{Q'Q} \cdot \overline{BC}$. Da D auf der Verlängerung von CR über R hinaus liegt, liegt auch der Schnittpunkt der Geraden durch Q, Q' mit AD auf der Verlängerung von QQ' über Q' hinaus; d. h., es gilt $\overline{Q'Q} < \overline{AB}$.

Somit ist stets $F_1 > F_2$. Ulrike und Vera haben sich folglich unlösbare Aufgaben gestellt, Waltraud dagegen eine lösbare Aufgabe.

<u>2. Lösungsweg:</u>

Mit $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{DR} = x$, $\overline{BQ} = y$ gilt $F_1 = \frac{1}{2}\,ab$ und

$$\begin{aligned} F_2 &= ab - \tfrac{1}{2}\,bx - \tfrac{1}{2}(a - x)\,(b - y) - \tfrac{1}{2}\,ay \\ &= ab - \tfrac{1}{2}\,bx - \tfrac{1}{2}\,ab + \tfrac{1}{2}\,bx + \tfrac{1}{2}\,ay - \tfrac{1}{2}\,xy - \tfrac{1}{2}\,ay \\ &= \tfrac{1}{2}\,ab - \tfrac{1}{2}\,xy \\ &< \tfrac{1}{2}\,ab = F_1. \end{aligned}$$

Schlußsatz wie im 1. Lösungsweg.

<u>231036) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Siehe Abbildung L 231036.

<u>Konstruktionsbeschreibung:</u>

(1) Die Gerade durch S' und R' schneidet A'B' in einem Punkt E'.
(2) Die Gerade durch C' und D' schneidet die Gerade durch P' und Q' in einem Punkt F'.
(3) Die Gerade durch D' und E' schneidet die Gerade durch Q' und R' in einem Punkt G'.
(4) Die Gerade durch B' und C' schneidet die Gerade durch F' und G' in einem Punkt H'.
(5) Die Gerade durch H' und P' schneidet S'B' in einem Punkt Y'.
(6) Die Gerade durch Y' und R' schneidet S'A' in einem Punkt X'.

Das Viereck P'Q'X'Y' ist das gesuchte Bild der Schnittfigur.

<u>Hinweis zur Korrektur:</u> In der Aufgabe wird <u>nicht</u> verlangt, eine Konstruktion anzugeben, die für <u>beliebige</u> Pyramiden ABCDS und Punkte P,Q,R (auf CS, DS bzw. ABS mit den nötigen Einschränkungen für das Entstehen einer Schnittfigur PQXY mit X,Y auf AS bzw. BS) das geforderte Bild der Schnittfigur liefert. Die Unrichtigkeit einer fehlerhaft angegebenen Konstruktionsbeschreibung ist also nicht damit zu begründen, daß die betreffende Beschreibung keine

Allgemeingültigkeit (im oben genannten Sinn) besitzt, sondern damit, daß im (durch das Aufgabenblatt) vorgegebenen konkreten Fall eine nach dieser Beschreibung genau ausgeführte Konstruktion zu einer Figur führen würde, die vom genauen geforderten Resultat P'Q'X'Y' abweicht.

Konstruktion

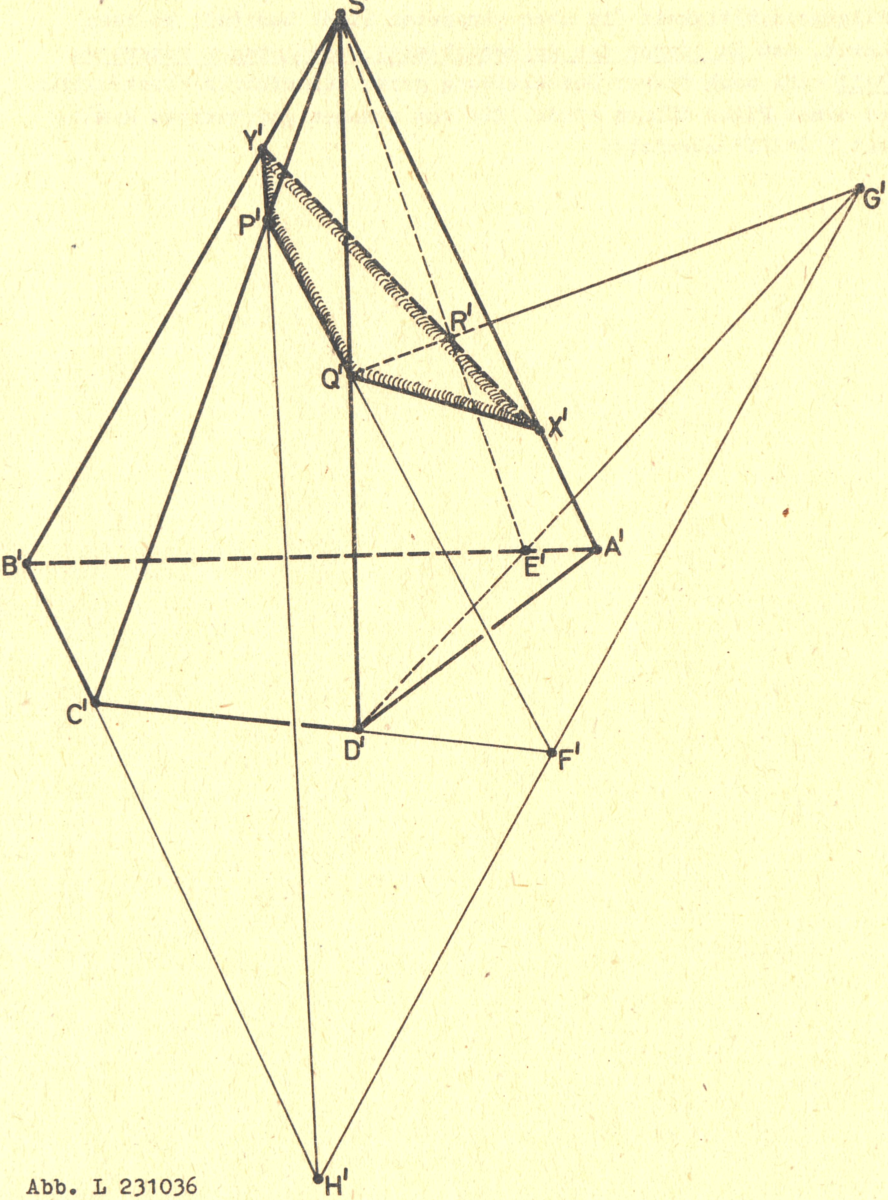

Abb. L 231036