XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 10

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>231021</u>

Auf einem Schachbrett kann eine Dame so ziehen, daß sie von ihrem Platz aus alle Felder in der waagerechten und in der senkrechten Reihe und die Felder der beiden sich in ihrem Standpunkt schneidenden Diagonalen erreichen kann. In der Abbildung A 231021 ist die Stellung der Dame durch ein schwarzes Feld gekennzeichnet, die erreichbaren Felder sind mit Punkten markiert. Buchstaben und Zahlen am Rande sollen helfen, die Felder zu benennen (hier steht z. B. die Dame auf d2).

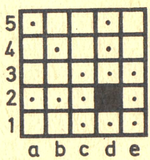

Abb. A 231021

Auf einem Quadrat aus 5 x 5 Feldern sollen nun 5 Damen so aufgestellt werden, daß keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.

Stellen Sie fest, ob dies möglich ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Aufstellungen der geforderten Art, die sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen!

<u>231022</u>

Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Zahlenpaare $[g;r]$ aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r, die die Gleichung

$$\frac{3}{3r^2 + 1} = g$$

erfüllen!

A 10

231023

Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild A'B'C'D'E'F'G'H' eines Würfels ABCDEFGH bei schräger Parallelprojektion gegeben. Ferner sind die Bilder P',Q' und R' dreier Punkte P,Q bzw. R gegeben, wobei

P auf der Seitenfläche ABFE,
Q auf der Seitenfläche BCGF,
R auf der Seitenfläche DAEH

liegt.
Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur des Würfels mit der Ebene durch P,Q und R! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

231024

Beweisen Sie, daß es genau eine positive rationale Zahl x gibt, die die Gleichung

$$x^x = 27$$

erfüllt!

Arbeitsblatt zu 231023

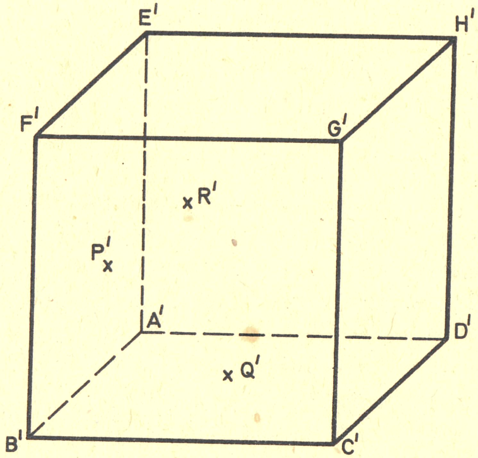

Abb. A 231023

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

231021) Lösung: **8 Punkte**

I. Wenn eine Aufstellung von 5 Damen die Forderung erfüllt, daß keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann, so folgt zunächst, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Dame stehen muß. Ferner kann bei der Aufstellung nur eine der beiden Möglichkeiten (1), (2) zutreffen:

(1) Auf dem Feld c3 steht eine Dame.

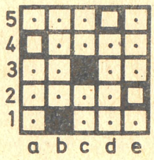

Abb. L 231021;1

In Zeile 1 muß dann eine Dame entweder auf b1 oder auf d1 stehen. Durch eventuelle Spiegelung kann erreicht werden, daß auf b1 eine Dame steht. Aus Abbildung L 231021;1 ist dann ersichtlich, daß drei weitere Damen nur noch auf a4, d5 und e2 stehen können (siehe Abb. L 231021;3).

(2) Auf dem Feld c3 steht keine Dame.

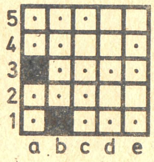

Abb. L 231021;2

Stünde dann in keinem der Felder
b1, d1, a2, a4, b5, d5, e2, e4 (*)
eine Dame, so müßte von den beiden Zeilen 1 und 5 die eine in einem Eckfeld (Spalte a oder e), die andere in ihrem Mittelfeld (Spalte c) besetzt sein. Das Entsprechende würde für die beiden Spalten a und e gelten. Dies ergäbe einen Widerspruch, da die Dame auf dem Mittelfeld der Zeile 1 oder 5 die Dame auf dem Mittelfeld der Spalte a oder e erreichen könnte.
Also steht eine Dame auf einem der Felder (*); durch eventuelle Drehung und Spiegelung kann erreicht werden, daß auf b1

eine Dame steht. Auf e3 kann dann keine Dame stehen, da von den Damen auf b1, e3 alle Felder der Zeile 2 erreicht würden. Also muß in Zeile 3 eine Dame auf a3 stehen. Aus Abbildung L 231021;2 ist dann ersichtlich: Auf d4 kann keine Dame stehen (keine Möglichkeit für Zeile 5), also steht auf c4 eine Dame, und dann können zwei weitere Damen nur noch auf d2 und e5 stehen (Abbildung L 231021;4).

Damit ist bewiesen: Es gibt bis auf Spiegelung und Drehung höchstens die beiden Aufstellungen der Abbildungen 23/1021;3 und 231021;4.

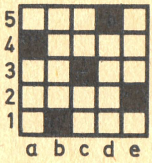

Abb. L 231021;3

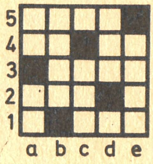

Abb. L 231021;4

II. Diese beiden Aufstellungen erfüllen auch die Bedingung, daß keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.

Sie lassen sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen, da bei jeder Drehung oder Spiegelung des Quadrates das Feld c3 in sich übergeht, das in Abbildung 231021;3 besetzt ist, in Abbildung 231021;4 aber nicht.

Somit gibt es bis auf Drehung und Spiegelung genau die beiden Aufstellungen der geforderten Art, die in Abbildung 231021;3 und Abbildung 231021;4 angegeben sind.

<u>231022) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

I. Wenn ein Zahlenpaar $[g;r]$ die verlangten Eigenschaften hat, so folgt: Da das Quadrat jeder reellen Zahl $\geqq 0$ ist, gilt

$$3r^2 + 1 \geqq 1. \qquad (1)$$

Hieraus folgt einerseits $3r^2 + 1 > 0$; daher und wegen $3 > 0$ gilt $\frac{3}{3r^2 + 1} > 0$.

Andererseits folgt aus (1) (und $3 > 0$, $1 > 0$), daß

$$\frac{3}{3r^2 + 1} \leqq \frac{3}{1} = 3$$

gilt. Somit erfüllt die ganze Zahl g die Ungleichung

$$0 < g \leqq 3. \qquad (2)$$

Aus $\frac{3}{3r^2 + 1} = g$ folgt weiter $3gr^2 + g = 3$, $r^2 = \frac{3 - g}{3g}$.

Diese Gleichung lautet für die ganzzahligen Lösungen von (2) so, wie in der folgenden Tabelle angegeben:

g	$r^2 = \frac{3-g}{3g}$
1	$r^2 = \frac{2}{3}$
2	$r^2 = \frac{1}{6}$
3	$r^2 = 0$

Daher können nur die Paare

$$\left[1 ; \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right], \left[1 ; -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right], \left[2 ; \sqrt{\tfrac{1}{6}}\right], \left[2 ; -\sqrt{\tfrac{1}{6}}\right], \left[3 ; 0\right]$$

die verlangten Eigenschaften haben.

II. Sie haben diese Eigenschaften; denn 1, 2 und 3 sind ganze Zahlen, $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\pm\sqrt{\frac{1}{6}}$, 0 sind reelle Zahlen, und in der folgenden Tabelle wird $\frac{3}{3r^2 + 1} = g$ bestätigt:

g	r	$3r^2+1$	$\frac{3}{3r^2+1}$
1	$\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$	2+1	$\frac{3}{3}$
2	$\pm\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\frac{1}{2} + 1$	$\frac{3}{\frac{3}{2}}$
3	0	0+1	$\frac{3}{1}$

<u>231023) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Die Parallelen durch P,Q,R zu FB liegen in den Seitenflächen ABFE, BCGF bzw. DAEH. Sie schneiden daher die Strecken AB, BC bzw. DA; die Schnittpunkte seien U, V bzw. W. Da parallele Geraden bei Parallelprojektion wieder in parallele Geraden übergehen, folgt:

L 10

Man konstruiere

(1) die Parallelen durch P', Q', R' zu F'B' und ihre Schnittpunkte U', V' bzw. W' mit A'B', B'V' bzw. D'A';
dann sind U', V', W' die Bildpunkte von U, V bzw. W.

Wegen PU ∥ QV liegen P,Q,U,V in derselben Ebene. Die Geraden durch P, Q bzw. U, V sind nicht zueinander parallel (denn wie die Konstruktion ergibt, ist P'Q' ∦ U'V'); sie haben also einen Schnittpunkt S_{PQ}. Er liegt in der Ebene durch P,Q,R (da P und Q und folglich ihre Verbindungsgerade in dieser Ebene liegen) und in der Ebene durch A,B,C,D (da U und V in dieser liegen). Daraus folgt:

Man konstruiere

(2) die Geraden durch P', Q' bzw. U', V' und ihren Schnittpunkt S'_{PQ}; dann ist S'_{PQ} der Bildpunkt eines Punktes S_{PQ} auf der Schnittgeraden s der Ebenen durch P,Q,R bzw. A,B,C,D.

Ebenso folgt: Man konstruiere

(3) die Geraden durch P', R' bzw. U', W' und ihren Schnittpunkt S'_{PR}; dann ist S'_{PR} der Bildpunkt eines Punktes S_{PR} auf der Schnittgeraden s.

Konstruiert man also

(4) die Gerade s' durch S'_{PQ}, S'_{PR},

so ist s' die Bildgerade von s.

Die Gerade durch A,B und die Gerade s liegen in der Ebene durch A,B,C,D. Sie sind auch nicht parallel zueinander (denn es ist A'B' ∦ s'); sie haben also einen Schnittpunkt S_{AB}. Er liegt in der Ebene durch P,Q,R (da s in dieser Ebene liegt) und in der Ebene durch A,B,F,E. Das gilt auch von P. Also ist die Gerade durch S_{AB} und P die Schnittgerade der Ebenen durch P,Q,R bzw. A,B,F,E. Die im Quadrat ABFE gelegene Teilstrecke dieser Geraden ist folglich ein Teil der gesuchten Schnittfigur.

Daraus folgt: Konstruiert man

(5) die Gerade durch A',B' und ihren Schnittpunkt S'_{AB} mit s',

(6) die Gerade durch S'_{AB}, P' und ihre in A'B'F'E' gelegene Teilstrecke K'L' (K' auf A'E', L' auf B'F'),

so ist K'L' das Bild des Teiles der Schnittfigur (K auf AE, L auf BF).

L 10

Damit folgt weiter:

(7) Man verlängere L'Q' bis zum Schnitt M' mit C'G' sowie K'R' bis zum Schnitt N' mit D'H'.

Dann ist das Viereck K'L'M'N' das Bild der Schnittfigur KLMN.

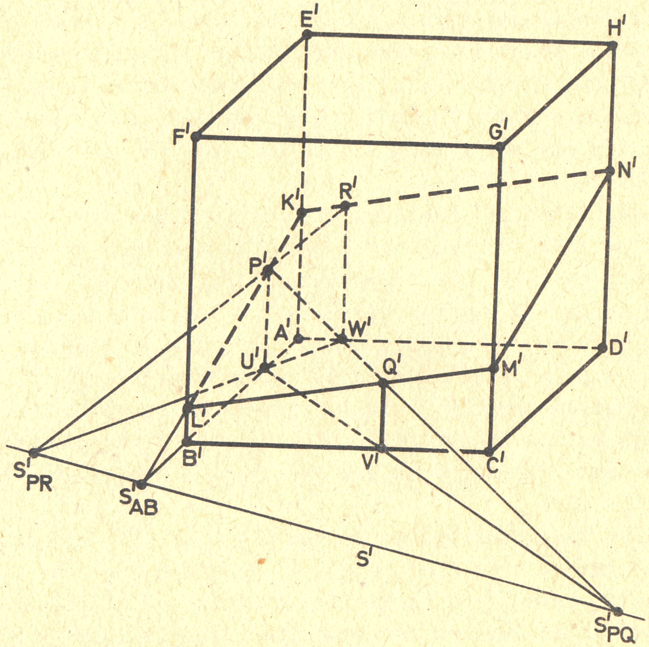

Abb. L 231023a

<u>Hinweis für Zeichenkontrollen:</u>

K'L'M'N' ist ein Parallelogramm. Für je zwei der Punkte K', P', L', Q', M', N', R' und die entsprechenden zwei der Punkte A', U', B', V', C', D', W' schneiden sich die Verbindungsgeraden auf der Geraden s'.

(Diese Feststellungen können auch zur Gewinnung <u>anderer Lösungswege</u> ausgebaut werden.)

<u>Anmerkung:</u> Eine Begründung für die Existenz der Punkte S_{PQ}, S_{PR} und S_{AB} wird vom Schüler nicht verlangt.

Anderer Lösungsweg:

Die Ebene durch P,C,G enthält die Parallele durch P zu CG, die wie im obigen Lösungsweg AB in einem Punkt U schneidet. Die zu CG parallele Ebene durch Q und R enthält die Parallelen durch Q und R zu CG, die BC bzw. AD in V bzw. W schneiden. Wie oben in (1) kann man die Bilder U', V', W' von U,V,W konstruieren. Da U,V,W,C in der Ebene durch A,B,C,D liegen und da (wegen U'C' $\nparallel$ V'W') UC $\nparallel$ VW gilt[1], schneiden sich UC und VW in einem Punkt T. Folglich schneiden sich auch die Ebene durch P,C,G und die zu CG parallele Ebene durch Q und R, und zwar schneiden sich diese Ebenen (da sie beide parallel zu CG sind) in der Parallelen durch T zu CG.

Diese Parallele schneidet QR; denn sowohl sie als auch QR liegen in der zu CG parallelen Ebene durch Q und R, und es gilt QR $\nparallel$ CG (wegen Q'R' $\nparallel$ C'G'). Für den Schnittpunkt J gilt:

Da die Ebene durch P,C,G mit U und C auch T und folglich die Parallele durch T zu CG enthält, enthält sie auch J. Andererseits liegt J auf QR, also auch in der Ebene durch P,Q,R. Folglich ist die Gerade durch P,J die Schnittgerade der Ebenen durch P,C,G bzw. P,Q,R. Sie schneidet somit (wegen PJ $\nparallel$ CG) die Gerade durch C,G in deren Schnittpunkt mit der Ebene durch P,Q,R. Das besagt:

Man konstruiere den Schnittpunkt T' von U'C' mit V'W' und dann die Parallele durch T' zu C'G', die Q'R' in einem Punkt J' schneidet. Die Gerade durch P', J' schneidet C'G' in dem Bildpunkt M' des auf CG gelegenen Punktes der gesuchten Schnittfigur. Dann hat man nur noch M'Q' zu verlängern bis zum Schnitt L' mit B'F', L'P' bis zum Schnitt K' mit A'E' und K'R' bis zum Schnitt N' mit D'H', um das Bild K'L'M'N' der Schnittfigur KLMN zu erhalten.

---

1 Diese Begründung für die Existenz von T wird vom Schüler nicht verlangt.

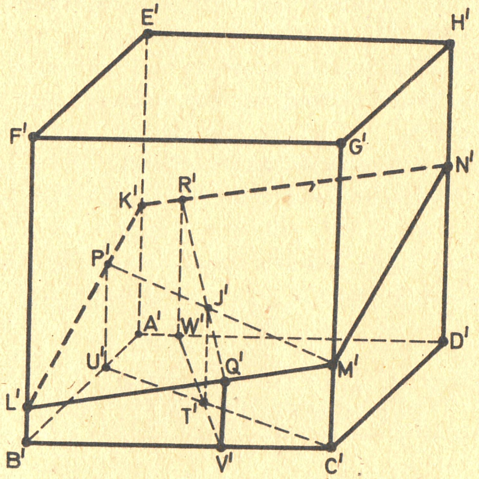

Abb. L 231023b

<u>231024) Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

(I) Es gilt $3^3 = 27$.

(II) Aus $0 < x < 1$ folgt auch $x^x < 1$; denn da x rational ist, gibt es natürliche Zahlen $p, q > 0$ mit $x = \frac{p}{q}$, und damit ist

$x^x = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$. Aus $x < 1$ folgt somit $x^p < 1$ und daraus

$\sqrt[q]{x^p} < 1$.

(III) Aus $x = 1$ folgt $x^x = 1$.

(IV) Aus $1 < x < 3$ folgt $x^x < x^3$, da für Potenzen mit einer Basis oberhalb 1 gilt: Je größer ihr Exponent ist, um so größer ist ihre Potenz.

Weiter folgt $x^3 < 3^3$; denn für Potenzen mit dem Exponenten 3 gilt: Je größer die Basis ist, desto größer ist die Potenz.

(V) Mit den gleichen Begründungen folgt aus $x > 3$, daß $x^x > x^3 > 3^3$ gilt.

Aus (I) bis (V) folgt, daß unter allen positiven rationalen Zahlen x genau die Zahl $x = 3$ die Gleichung $x^x = 27$ erfüllt.

Hinweis zur Korrektur: Zur Einschätzung eines Lösungstextes auf Vollständigkeit ist zu prüfen, ob für angegebene Schlüsse (z. B. "aus $0 < x < 1$ folgt $x^x < 1$") Begründungen formuliert sind (wie z. B. die obige verbale Formulierung der Begründung, daß für $z > 0$ und $0 < x < 1$ stets $x^z < 1$ gilt). Dabei ist ferner zu prüfen, ob die angegebenen Begründungen mit den erforderlichen Einschränkungen versehen sind. (So bedarf z. B. die in (IV) und (V) verbal formulierte Begründung, daß aus $u > v$ auch $x^u > x^v$ folgt, der Einschränkung $x > 1$.) Insbesondere beachte man gegebenenfalls, daß die Funktion $y = x^x$ im Intervall $0 < x < 1$ nicht monoton ist.

Empfehlung für die Punktverteilung
OKL 10 Gesamtpunktzahl: 40

231021	8 Punkte
Angabe der beiden Lösungen	2 Pkt.
Nachweis, daß keine weiteren Lösungen existieren mittels vollständiger Fallunterscheidung	6 Pkt.
231022	10 Punkte
Angabe der fünf Lösungen	5 Pkt.
Probe	1 Pkt.
Nachweis der Vollständigkeit der Lösungsmenge (durch Herleitung der Bedingung $0 < g \leq 3$)	4 Pkt.
231023	10 Punkte
Durchführung der Konstruktion (bei Formverstößen sollten maximal 2 Punkte abgezogen werden)	6 Pkt.
Begründung der Konstruktion	4 Pkt.
231024	12 Punkte
Nachweis, daß $x = 3$ Lösung ist	3 Pkt.
Nachweis, daß für $x \geq 1$ keine weitere Lösung existieren kann	5 Pkt.
(wird nur $x > 3$ erfaßt nur 2 Punkte)	
Nachweis, daß für $0 < x < 1$ keine Lösung existiert	4 Pkt.