A 9;I

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

230931

Man ermittle alle Tripel $(x;y;z)$ natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) x, y und z sind Primzahlen.

(2) Jede Ziffer aus den Ziffernarstellungen von x, y und z (im dekadischen Zahlensystem) stellt eine Primzahl dar.

(3) Es gilt $x < y$.

(4) Es gilt $x + y = z$.

230932

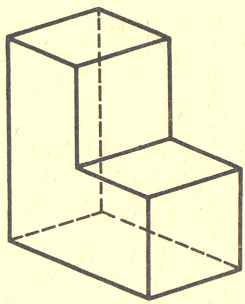

Abb. A 230932

In Abb. A 230932 ist ein Körper K skizziert. Er besteht aus drei Würfeln der Kantenlänge 1 cm, die in der angegebenen Anordnung fest zusammengefügt sind.

Aus genügend vielen Körpern dieser Gestalt K soll ein (vollständig ausgefüllter) Würfel W (Kantenlänge n Zentimeter) zusammengesetzt werden.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die das möglich ist!

A 9;I

<u>230933</u>

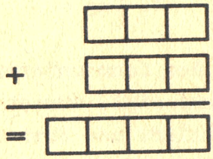

Abb. A 230933

In dem nebenstehenden Schema soll in jedes Kästchen genau eine der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) so eingetragen werden, daß jede der Ziffern 0,1,2,3,4,5, 6,7,8,9 einmal vorkommt und daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.

Beweisen Sie, daß es nicht möglich ist, durch eine solche Eintragung auch noch die zusätzliche Forderung zu erfüllen, daß bei der Ausführung der Addition genau zwei Überträge auftreten!

Probieren?!

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

230934

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die

$$-5 \leqq \frac{4x-3}{2x+1} < 6$$

gilt!

230935

In einem Dreieck ABC schneide eine Parallele zu AB, über deren Lage sonst nichts vorausgesetzt werden soll, die Seite AC in einem Punkt A_1 zwischen A und C, und sie schneide die Seite BC in B_1. Ferner sei P auf AB ein Punkt zwischen A und B, über dessen Lage sonst ebenfalls nichts vorausgesetzt werden soll. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC sei F_0, der Flächeninhalt des Dreiecks A_1B_1C sei F_1.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt F des Vierecks A_1PB_1C in Abhängigkeit von F_0 und F_1!

230936

Drei Schüler X, Y, Z diskutieren über die Möglichkeiten, ein gleichseitiges Dreieck D in drei flächengleiche Dreiecke D_1, D_2, D_3 zu zerlegen.

X behauptet: Es gibt genau drei verschiedene derartige Zerlegungen.

Y behauptet: Es gibt genau vier verschiedene derartige Zerlegungen.

Z behauptet: Es gibt mehr als vier verschiedene derartige Zerlegungen.

Welcher der drei Schüler hat recht?

Zwei Zerlegungen von D (einmal in D_1, D_2, D_3, ein zweites Mal in D_1', D_2', D_3') werden dabei genau dann als verschieden bezeichnet, wenn es keine Reihenfolge der Bezeichnungen D_1', D_2', D_3' gibt, für die $D_1 \cong D_1'$, $D_2 \cong D_2'$, $D_3 \cong D_3'$ gilt.

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

230931) Lösung: 6 Punkte

I. Wenn ein Tripel $(x;y;z)$ natürlicher Zahlen die verlangten Eigenschaften hat, so folgt:

Wäre x ungerade, so wegen (1) und (3) auch y, und es wäre $x \geq 3$, $y \geq 5$. Nach (4) wäre dann z gerade und $z \geq 8$, also z keine Primzahl, im Widerspruch zu (1).

Daher ist x gerade, also $x = 2$. Hiernach und wegen (1),(4) sind y und z zwei unmittelbar (d. h. mit der Differenz 2) aufeinanderfolgende Primzahlen. (*)

Hat y die Einerziffer b und z die Einerziffer c, so ist folglich $(b;c)$ eines der Paare (1;3), (3;5), (5;7), (7;9), (9;1).

Nach (2) scheiden hiervon alle diejenigen Paare aus, die 1 oder 9 enthalten. Daher verbleiben für $(b;c)$ nur die Möglichkeiten (3;5), (5;7).

Eine der Zahlen y, z ist also durch 5 teilbar und somit wegen (1) selbst gleich 5. Daher und wegen (*) verbleiben nur die beiden Möglichkeiten

$(y;z) = (3;5)$, $(y;z) = (5;7)$.

Also können nur die Tripel (2;3;5) und (2;5;7) die verlangten Eigenschaften haben.

II. Sie haben diese Eigenschaften; denn 2, 3, 5 und 7 sind Primzahlen; es gilt $2 < 3$ bzw. $2 < 5$ und $2 + 3 = 5$ bzw. $2 + 5 = 7$.

230932) Lösung: 7 Punkte

I. Wenn ein Würfel W der Kantenlänge n Zentimeter aus m Körpern der Gestalt K zusammengesetzt werden kann, so läßt er sich auch zusammensetzen aus

$$n^3 = 3 \cdot m$$

Würfeln der Kantenlänge 1 cm. Daher ist n^3 und somit auch n durch 3 teilbar.

Also ist das Zusammensetzen eines Würfels W der Kantenlänge n Zentimeter aus Körpern der Gestalt K nur möglich, wenn n durch 3 teilbar ist.

II. a) Für $n = 3$ ist ein solches Zusammensetzen z. B. folgendermaßen möglich:
Aus je zwei Körpern der Gestalt K kann man einen Quader mit den Kantenlängen 1 cm, 2 cm, 3 cm zusammensetzen. Aus zwei solchen Quadern und drei weiteren Körpern der Gestalt K kann man ferner einen Körper der in Abb. L 230932 ersichtlichen Gestalt zusammensetzen.

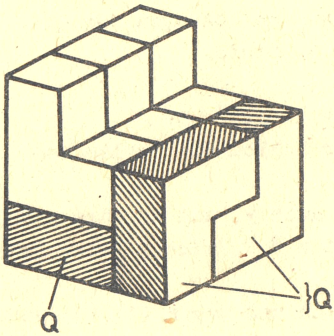

Abb. L 230932

Dieser läßt sich dann durch einen weiteren Quader der Kantenlängen 1 cm, 2 cm, 3 cm zu dem gesuchten Würfel ergänzen.

b) Für jeden Würfel W einer Kantenlänge von $n = 3k$ Zentimetern ($k = 2,3,\ldots$) ist ein Zusammensetzen aus Körpern der Gestalt K ebenfalls möglich.
Er läßt sich nämlich aus k^3 Würfeln W' der Kantenlänge 3 cm zusammensetzen (k Schichten aus je k Reihen mit je k Würfeln W') und jeder dieser Würfel W' nach a) aus Körpern der Gestalt K.

Mit I., II. ist gezeigt, daß genau die durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen $n > 0$ die geforderte Eigenschaft haben.

<u>230933) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Für jede Eintragung, bei der eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht, gilt:
Wenn bei einem der vier Additionsfälle (an der Einer-, Zehner-, Hunderter- und Tausenderstelle) kein Übertrag vom vorhergehenden

Additionsfall zu berücksichtigen ist[1], so sind von den beteiligten Ziffern entweder genau zwei oder keine ungerade (das Letztgenannte, wenn die betreffenden Ziffern beider Summanden gerade sind; das Vorhergenannte in den übrigen Fällen. Denn zwei gerade oder zwei ungerade Ziffern in den Summanden führen auf eine gerade Ziffer in der Summe; eine gerade und eine ungerade Ziffer in den Summanden aber führen auf eine ungerade Ziffer in der Summe).

Ist dagegen ein Übertrag zu berücksichtigen (der im Vergleich mit dem Additionsfall ohne Übertrag die Eigenschaft der Summe, gerade oder ungerade zu sein, ändert), so sind folglich von den beteiligten Ziffern des betreffenden Additionsfalles entweder alle drei oder genau eine ungerade.

Wäre nun das Auftreten von genau zwei Überträgen möglich, so ergäbe sich als Anzahl aller überhaupt vorkommenden ungeraden Ziffern eine gerade Zahl (diese Anzahl würde sich nämlich zusammensetzen aus der Summe gerader Anzahlen in den Additionsfällen ohne Übertrag und aus genau zwei ungeraden Anzahlen in den Additionsfällen mit Übertrag). Da es aber genau die fünf ungeraden Ziffern 1,3,5,7,9 gibt, widerspricht dies der Bedingung, daß jede Ziffer genau einmal vorkommt.

Damit ist bewiesen, daß die zusätzliche Forderung des Auftretens von genau zwei Überträgen nicht erfüllbar ist.

Eine <u>andere Lösungsmöglichkeit</u> besteht darin, erst alle Eintragungen (ohne Einschränkung der Anzahl der Überträge) zu ermitteln und dann festzustellen, daß sich darunter keine mit genau zwei Überträgen befindet. Die genannte Ermittlung kann durch systematisches Probieren erfolgen. Dabei ist jedoch ein begleitender Text erforderlich, der die Vollständigkeit der ermittelten Eintragungen sicherstellt.

---

1 Für die Einerstelle ist dies stets so, da es keinen vorhergehenden Additionsfall gibt. Für die Tausenderstelle ist hier in dem Sinne von einem Additionsfall die Rede, daß als Tausenderziffer in beiden Summanden eine 0 gilt und daß bei der Addition ein Übertrag zu berücksichtigen ist. Eine gesonderte Formulierung für diese Fälle ist auch zu akzeptieren (aber nicht zu fordern).

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

230934) Lösung: 6 Punkte

Eine reelle Zahl x erfüllt genau dann die geforderte Ungleichung, wenn $2x + 1 \neq 0$, d. h. $x \neq -\frac{1}{2}$ ist und

$$-5 \leq \frac{4x-3}{2x+1} \text{ und } \frac{4x-3}{2x+1} < 6 \qquad (1)$$

gilt. Hierfür gibt es genau die beiden folgenden Möglichkeiten:

(A) Es sei $x > -\frac{1}{2}$. In diesem Fall sind die Ungleichungen (1) der Reihe nach äquivalent mit

$$-10x - 5 \leq 4x - 3 \text{ und } 4x - 3 < 12x + 6, \qquad (2)$$

$$-2 \leq 14x \quad \text{und} \quad -9 < 8x, \qquad (3)$$

$$x \geq -\frac{1}{7} \quad \text{und} \quad x > -\frac{9}{8}. \qquad (4)$$

Die Aussage, daß $x > -\frac{1}{2}$ und (4) gilt, ist wegen $-\frac{9}{8} < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{7}$ äquivalent mit $x \geq -\frac{1}{7}$.

(B) Es sei $x < -\frac{1}{2}$. In diesem Fall sind die Ungleichungen (1) der Reihe nach äquivalent zu (2), (3), (4) mit entgegengesetzten Ungleichheitszeichen, also zu

$$x \leq -\frac{1}{7} \quad \text{und} \quad x_1 < -\frac{9}{8}. \qquad (5)$$

Die Aussage, daß $x < -\frac{1}{2}$ und (5) gilt, ist wegen $-\frac{9}{8} < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{7}$ äquivalent mit $x < -\frac{9}{8}$.

Damit ist bewiesen, daß genau diejenigen Zahlen x, für die

$$x \geq -\frac{1}{7} \quad \text{oder} \quad x < -\frac{9}{8}$$

gilt, die geforderte Ungleichung erfüllen.

230935) Lösung: 6 Punkte

Das Lot von C auf die Gerade durch A und B habe den Fußpunkt D. Es schneidet die Gerade durch A_1 und B_1 in einem Punkt D_1. Für $\overline{AB} = c$, $\overline{A_1B_1} = c_1$, $\overline{CD} = h$ und $\overline{CD_1} = h_1$ gilt dann

$$F_0 = \frac{1}{2} c \cdot h, \; F_1 = \frac{1}{2} c_1 \cdot h_1,$$

ferner hat das Dreieck A_1B_1P den Flächeninhalt

$$F_2 = \frac{1}{2} c_1 \cdot (h - h_1).$$

Daher ist

$$F = F_1 + F_2 = \frac{1}{2} c_1 \cdot h = \frac{h}{h_1} \cdot F_1. \qquad (1)$$

Nach dem Strahlensatz gilt $c : c_1 = h : h_1$, also

$$F_0 : F_1 = ch : c_1h_1 = h^2 : h_1{}^2 \text{ und somit}$$

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\sqrt{F_0}}{\sqrt{F_1}}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$F = \sqrt{F_0 \cdot F_1}.$$

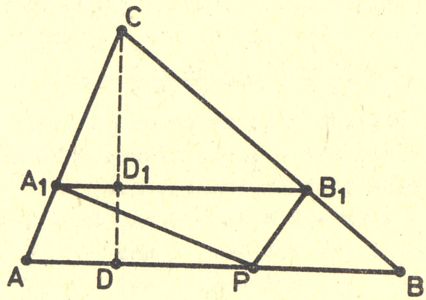

Abb. L 230935

<u>230935) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

I. Wir zeigen, daß es vier Zerlegungen eines Dreiecks D = ABC in drei flächengleiche Dreiecke gibt: Abb. L 230936, (1) bis (4)

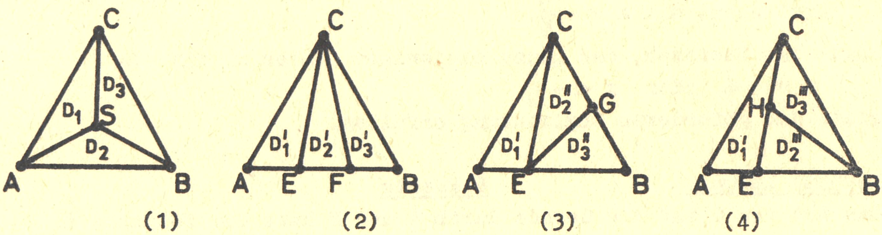

Abb. L 230936

Die Teildreiecke sind jeweils flächengleich:

In (1) ist S sowohl Schwerpunkt als auch Höhenschnittpunkt, da das Dreieck ABC gleichseitig ist. Daher haben die Teildreiecke D_1, D_2, D_3 gleichlange Grundlinien und gleichlange zugehörige Höhen.

In (2) gilt $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$, und die Dreiecke D_1', D_2', D_3' haben gleichlange zugehörige Höhen.

In (3) gilt $\overline{AE} = \frac{1}{3}\,\overline{AB}$, $\overline{EB} = \frac{2}{3}\,\overline{AB}$ sowie $\overline{BG} = \overline{GC}$. Daher hat das Dreieck EBC den doppelten Inhalt des Dreiecks $D_1' = AEC$, und es wird durch GE in zwei flächengleiche Dreiecke D_2'', D_3'' zerlegt. In (4) erfolgt die Begründung analog; hier wird CE durch H halbiert.

II. Wir zeigen, daß je zwei dieser vier Zerlegungen voneinander verschieden sind:
In jeder der Zerlegungen (2),(3),(4) kommt ein Teildreieck vor, das keine Seite der Länge $a = \overline{AB}$ hat, während in (1) jedes Teildreieck eine solche Seite hat. Daher ist die Zerlegung (1) von jeder der Zerlegungen (2),(3),(4) verschieden.
In der Zerlegung (3) kommt nur ein Teildreieck vor, das eine Seite der Länge a hat, während in (2) und (4) je zwei solche Teildreiecke vorkommen. Daher ist die Zerlegung (3) von jeder der Zerlegungen (2),(4) verschieden.
In der Zerlegung (4) kommt nur ein Teildreieck vor, das eine Seite der Länge a und einen Winkel der Größe 60° hat, während in der Zerlegung (2) zwei solche Teildreiecke vorkommen. Daher sind die Zerlegungen (2) und (4) voneinander verschieden.

III. Wir zeigen, daß es keine Zerlegung von D in drei flächengleiche Dreiecke D_1^*, D_2^*, D_3^* gibt, die im Sinne der Aufgabenstellung von allen vier Zerlegungen (1),(2),(3),(4) verschieden wäre.
Für jede Zerlegung von D in drei flächengleiche Dreiecke D_1^*, D_2^*, D_3^* gilt: Es gibt mindestens eine Seite von D, die bei der Zerlegung nicht geteilt wird. (Gäbe es nämlich auf allen drei Seiten von D Teilpunkte, so wären die an A und an B angrenzenden Teilstrecken c_A, c_B von AB voneinander verschieden, ebenso wären die an B und an C angrenzenden Teilstrecken a_B, a_C von BC voneinander verschieden, und es wären die an C und an A angrenzenden Teilstrecken b_C, b_A von CA voneinander verschieden. Dann gäbe es, damit nicht mehr als drei Teildreiecke entstehen, ein Dreieck der Zerlegung, das c_A und b_A als Seiten hätte, ein weiteres mit c_B und a_B, ein drittes mit a_C und b_C, aber diese drei Dreiecke ergäben zusammen noch nicht D.)
O.B.d.A. sei AC eine Seite von D, die bei der Zerlegung nicht geteilt wird; dasjenige Dreieck der Zerlegung, das AC als Seite

hat, sei o.B.d.A. D_1^*. Hierfür gibt es nur die beiden folgenden Möglichkeiten:

(1') Der dritte Eckpunkt S von D_1^* liegt im Innern von D. Das führt auf Fall (1), da für jede andere Lage von S mindestens in einem der Dreiecke eine andere zu der Grundlinie der Länge a gehörende Höhenlänge auftreten würde.

(2') Der dritte Eckpunkt von D_1^* liegt auf dem Rand von D, o.B.d.A. auf AB. Dann ist dies derjenige Punkt E, für den $\overline{AE} = \frac{a}{3}$ gilt. Das verbleibende Teildreieck EBC muß nun in die zwei Dreiecke D_2^*, D_3^* zerlegt sein. Das ist nur möglich durch eine Strecke, die durch eine der Ecken des Dreiecks EBC und die Mitte der Gegenseite geht. Damit verbleiben nur die Möglichkeiten (2),(3),(4).

Mit I., II., III. ist bewiesen, daß der Schüler Y recht hat.