A 9

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>230921</u>

Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x, für die die Summe aus x und der durch Vertauschen der Ziffern von x entstehenden Zahl y eine Quadratzahl ist!

<u>230922</u>

Von einem Trapez ABCD wird vorausgesetzt:

(1) Es gilt $AB \parallel DC$.

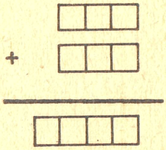
(2) Es gilt $\overline{AB} > \overline{DC}$.

(3) Das Trapez besitzt einen Innenwinkel mit einer Größe von 110°.

(4) Die Diagonalen AC und BD sind die Halbierenden der Winkel $\sphericalangle DAB$ bzw. $\sphericalangle ABC$.

Zeigen Sie, daß durch diese Voraussetzungen die Größen aller Innenwinkel des Trapezes eindeutig bestimmt sind und ermitteln Sie diese Größen!

<u>230923</u>



In das nebenstehende Schema einer Additionsaufgabe soll in jedes Kästchen eine Ziffer so eingetragen werden, daß jede der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) genau einmal auftritt und in den vorderen Kästchen keine 0 steht. Außerdem soll genau dreimal ein Übertrag auftreten.

Ermitteln Sie alle diejenigen vierstelligen Zahlen, die unter diesen Bedingungen als dritte Zeile (Summe) dieser Aufgabe möglich sind!

A 9

230924

Beweisen Sie:

Ist p eine Primzahl, dann ist $\sqrt{p}$ keine rationale Zahl.

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

230921) Lösung: 10 Punkte

Sind a und b die Ziffern einer zweistelligen Zahl x, so gilt

$$1 \leqq a \leqq 9,\ 0 \leqq b \leqq 9 \qquad (1)$$

und

$$x = 10a + b.$$

Durch Vertauschen der Ziffern entsteht daraus

$$y = 10b + a.$$

Die Summe $x+y = 11a + 11b = 11(a+b)$

ist genau dann eine Quadratzahl, wenn der Primfaktor 11 und weitere Primfaktoren jeweils in gerader Anzahl in a+b enthalten sind. Wegen (1), also $1 \leqq a+b \leqq 18$, kann a+b außer dem Primfaktor 11 keinen weiteren Primfaktor enthalten. Also ist x+y genau dann eine Quadratzahl, wenn

$$a + b = 11$$

gilt. Das trifft unter den Bedingungen (1) genau für die Wertepaare (a;b) der folgenden Tabelle zu. Daher haben genau die hierzu angegebenen Zahlen x die verlangte Eigenschaft.

a	2	3	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4	3	2
x	29	38	47	56	65	74	83	92

230922) Lösung: 10 Punkte

Es gilt $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$ und $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CDB$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.

Aus (4) und (1) folgt daher:

$$\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA \qquad (5)$$

bzw. $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CDB$

Aus (5) folgt: $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB}$. (6)

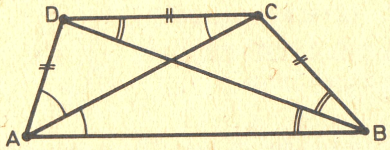


Abb. L 230922

Wegen (2) ist ABCD kein Parallelogramm, nach (6) daher ein gleichschenkliges Trapez. Seine stumpfen Innenwinkel liegen wegen (2) bei D und C, also gilt

$$\overline{\sphericalangle ADC} = \overline{\sphericalangle DCB} = 110^\circ. \qquad (7)$$

Die Innenwinkel bei A und B ergänzen (7) jeweils zu 180°, d. h., es gilt

$$\overline{\sphericalangle DAB} = \overline{\sphericalangle ABC} = 70^\circ. \qquad (8)$$

Mit (7) und (8) sind alle verlangten Winkelgrößen ermittelt.

Anmerkung: Zieht man zunächst nur (1), (2) und (3) heran, so hat man zu (3) zu diskutieren, ob jeder der vier Innenwinkel für die Größe 110° in Betracht kommt.

230923) Lösung: 10 Punkte

I. Wenn eine Eintragung die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:

(1) Die vorderste Ziffer der gesuchten Summe kann, da die 0 dafür nicht zugelassen ist, nur die 1 sein; denn die Summe zweier dreistelliger Zahlen ist kleiner als 2000.
Die 9 kann in der Summe nicht auftreten, weil die Summe zweier einstelliger Zahlen unter den gegebenen Bedingungen nicht 19 werden kann, während andererseits sowohl bei der Addition in der Einer- als auch bei der in der Zehner- und der in der Hunderterstelle ein Übertrag, also ein Additionsergebnis $\geqq 10$ gefordert ist.
Die 9 kann in den Summanden nicht als Zehner oder Hunderter auftreten, weil dann unter Berücksichtigung des Übertrags (der nur 1 sein kann) die Zehner- bzw. Hunderterziffer des anderen Summanden wieder in der Summe auftreten würde.

(2) Daraus folgt, daß die 9 in einem der Summanden als Einer stehen muß, o.B.d.A. stehe sie also im ersten Summanden.

(3) Die 0 darf in keinem Summanden vorkommen, da sonst kein Übertrag auftreten würde. Als Zwischenergebnis halten wir fest:
Im zweiten Summanden kann als Einer nicht stehen
0 wegen (3),
1 wegen (1),
9 wegen (2),
2; denn sonst erhält man in der Summe eine 1.
Wegen (2) und (3) kann die Summe nicht auf 0 enden.

(4) Damit im Zehner oder Hunderter der Summe eine 0 auftritt, müssen zwei Ziffern (bei der Addition der Zehner- oder der Hunderterspalten) als Summe 9 ergeben. Damit verbleiben höchstens die folgenden Möglichkeiten:

Einer des zweiten Summanden	Einer in der Summe	restliche Ziffern	mögliche Summe 9 aus zwei Summanden	mögliche dritte Zeile des Schemas
3	2	0,4,5,6,7,8	4+5	1062 oder 1602
4	3	0,2,5,6,7,8	2+7	1053 oder 1503
5	4	0,2,3,6,7,8	2+7 oder 3+6	*
6	5	0,2,3,4,7,8	2+7	1035 oder 1305
7	6	0,2,3,4,5,8	4+5	1026 oder 1206
8	7	0,2,3,4,5,6	4+5 oder 3+6	**

Die in der letzten Spalte angegebenen Zahlen ergeben sich jeweils aus den einzigen Möglichkeiten, die drei verbliebenen Ziffern so zu kombinieren, daß die Summe von zweien um 9 größer ist als die dritte. (In den Fällen * und ** gibt es keine solchen Möglichkeiten.)

Damit ist gezeigt, daß nur die acht in der letzten Spalte der Tabelle angegebenen Zahlen als dritte Zeile (Summe) auftreten können.

II. Sie können (unter Einhaltung aller Bedingungen der Aufgabenstellung) auftreten, wie z. B. die folgenden Eintragungen zeigen:

749	479	829	289	429	249	349	439
+853	+583	+674	+764	+876	+786	+857	+587
1602	1062	1503	1053	1305	1035	1206	1026

Somit gibt es genau die acht in der letzten Spalte angegebenen Ergebnisse.

230924) Lösung: 10 Punkte

Indirekter Beweis:

Angenommen, $\sqrt{p}$ wäre eine rationale Zahl. Dann gäbe es natürliche Zahlen m und n mit $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$. Dabei könnte erreicht werden, daß m und n teilerfremd sind. Daraus würde $pn^2 = m^2$ folgen[1], die Primzahl p müßte also m teilen, d. h., es würde $m = px$ mit einer natürlichen Zahl x gelten.

Daraus ergäbe sich $pn^2 = p^2 \cdot x^2$, also $n^2 = p \cdot x^2$, und daher müßte p auch n teilen, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von n und m.

Also war die Annahme, daß $\sqrt{p}$ rational ist, falsch, d. h., $\sqrt{p}$ ist keine rationale Zahl.

---

1 An dieser Stelle kann auch (sogar ohne die Teilerfremdheit von n und m) geschlossen werden: Es ergibt sich der Widerspruch, daß der Primfaktor p auf der linken Seite in einer ungeraden Anzahl und auf der rechten Seite in einer geraden Anzahl vorkommt, da jede Quadratzahl (also sowohl m^2 als auch n^2) jeden Primfaktor, den sie enthält, in einer geraden Anzahl besitzen muß.

Empfehlung für die Punktverteilung
OKL ~~9~~ Gesamtpunktzahl: 40

230921 — 10 Punkte

Angabe der acht Lösungen mit dem Nachweis, daß sie die Aufgabenstellung erfüllen — 4 Pkt.
Nachweis, daß nur diese acht Zahlen Lösungen sind (durch Herleitung der notwendigen Bedingung a+b=11) — 6 Pkt.

230922 — 10 Punkte

Beweis der Symmetrie — 6 Pkt.
Schluß auf $\overline{\sphericalangle ADC} = \overline{\sphericalangle DCB} = 110^\circ$ — 2 Pkt.
Angabe der restlichen Winkel — 2 Pkt.

230923 — 10 Punkte

Angabe der acht Lösungen mit dem Nachweis, daß sie die Aufgabenstellung erfüllen — 4 Pkt.
Nachweis, daß keine weiteren Lösungen existieren mittels vollständiger Fallunterscheidung — 6 Pkt.
(davon
für die Fixierung der 1... — 1 Punkt
für die Fixierung der 9... — 1 Punkt)

230924 — 10 Punkte

Ansatz des indirekten Beweises in der Form $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ — 2 Pkt.
Herleitung eines Widerspruches — 7 Pkt.
Schlußfolgerung — 1 Pkt.